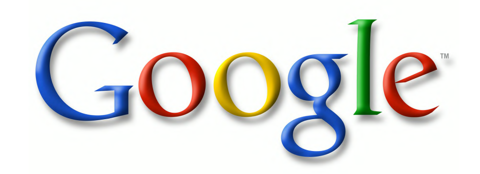
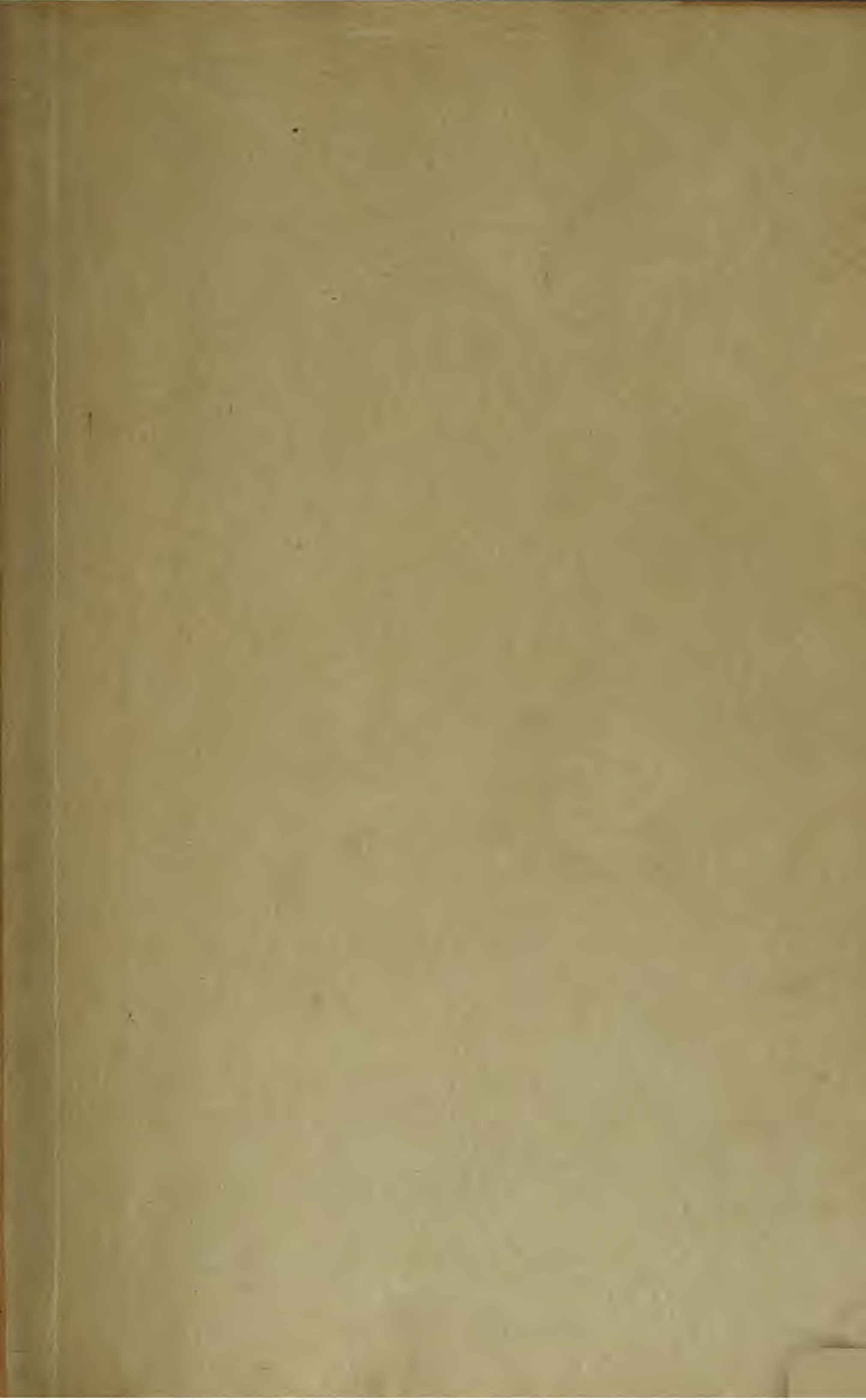
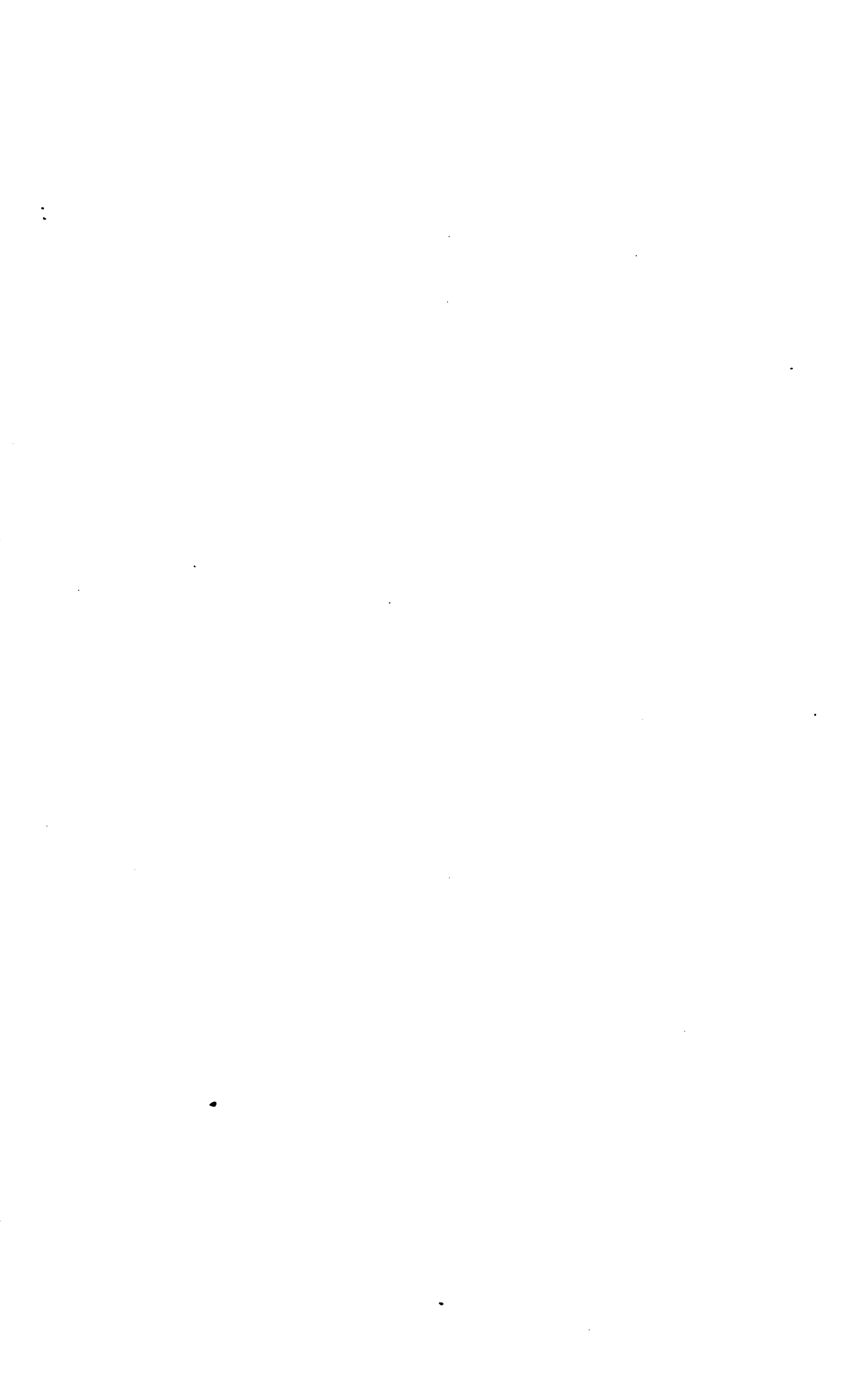


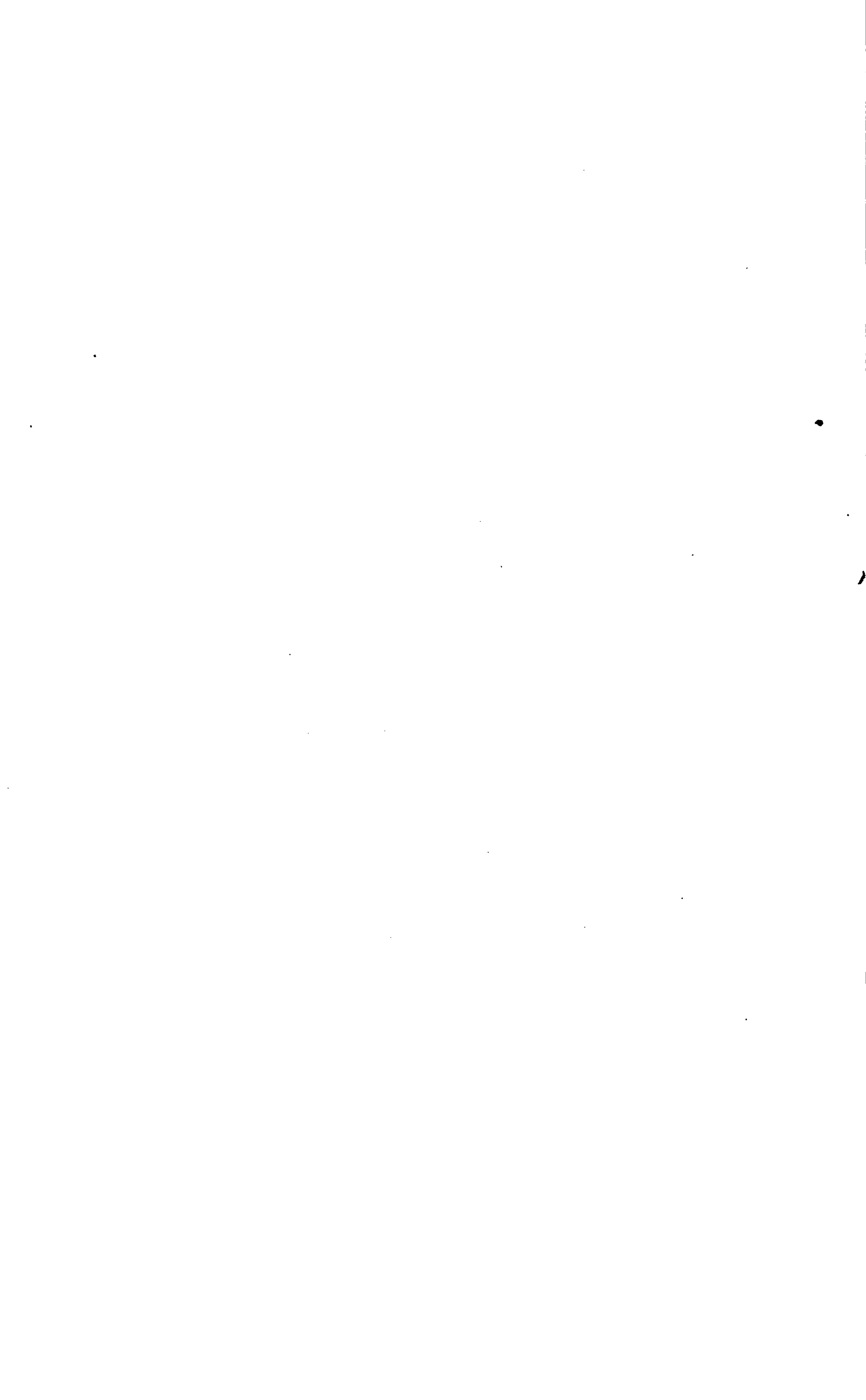



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE









THEORIE

ALLGEMEINER COFUNCTIONEN

UND

EINIGE IHRER ANWENDUNGEN.

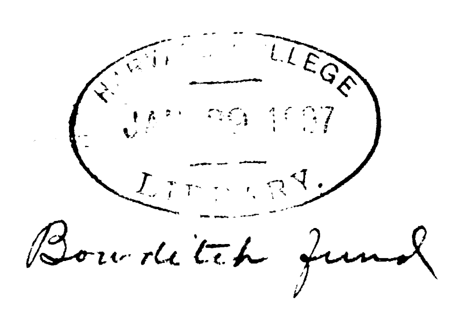
VON

Dr. HERMANN SCHAPIRA,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG.

ERSTER BAND.

ZWEITER THEIL. ERSTES HEFT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.



Vorwort.

Bekanntlich ist es für die algebraischen Functionen von fundamentaler Wichtigkeit, dieselben nicht jede einzeln für sich, sondern, wo es möglich ist, alle aus einer (irreductibeln) algebraischen Gleichung entspringenden in ihrer Zusammengehörigkeit zu betrachten. In vielen Fällen wird durch diesen Kunstgriff allein die eigentliche Schwierigkeit der algebraischen Irrationalität geradezu aufgehoben, indem die symmetrischen Functionen aller Wurzeln einer algebraischen Gleichung rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung werden*).

Ebenso wichtig erweist es sich für das Studium, insbesondere für die Darstellung der transcendenten (nichtalgebraischen) Functionen, alle diejenigen als zusammengehörig der Betrachtung gleichzeitig zu unterziehen, welche untereinander selbst oder deren Argumente untereinander in algebraischer Verwandschaft stehen. Viele Eigenschaften der Functionen treten dadurch viel klarer, übersichtlicher, verwendbarer hervor; aber auch viele Eigenschaften können nur auf diese Weise allein zum Vorschein kommen, ja viele und sehr wichtige Eigenthümlichkeiten entstehen **begrifflich** erst durch die gleichzeitige Betrachtungsweise der zusammengehörigen **„Cofunctionen“**. Diese

*) Dieses längst gefühlte und theils bekannte Princip ist eben als Princip mit seinen äussersten Consequenzen durch die Arbeiten von Kronecker und seinen Schülern zur vollen Durchführung gelangt.

Thatsache wurde bereits empfunden bei und seit der Entstehung der trigonometrischen, der ersten der überhaupt existirenden transcendenten Functionen: zum Sinus musste man sich gleichzeitig den Cosinus bilden und sie beide als „Cofunctionen“ betrachten. Die algebraische Cofunctionalität kommt hierbei entweder in Gestalt einer algebraischen Relation zweiten Grades (mit zwei Unbekannten) mit rationalen Coefficienten $u^2 + v^2 - 1 = 0$ zum Vorschein, welche beide Cofunctionen zusammen identisch befriedigen, wenn man $u = \sin x$, $v = \cos x$ setzt; oder auch als das sogenannte algebraische Additionstheorem, welches zwischen den Cofunctionen verschiedener Argumente, wie

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

stattfindet. Oder endlich auch als **lineare homogene** Relation zwischen $\cos x$, $\sin x$ einerseits und e^{ix}, e^{-ix} andererseits.

Diese letztere Relation (aus der die ersteren leicht folgen) verdient, als einfachere, als lineare homogene, den Vorzug. Aus dieser ersieht man aber auch sofort, dass aus derselben Exponentialfunction noch andere Cofunctionen, wie z. B. die hyperbolischen, als lineare homogene Functionen von e^x und e^{-x} und die allgemeineren als lineare homogene Functionen von

$$e^x, \; e^{r_n x}, \; e^{r_n^2 x}, \; \ldots, \; e^{r_n^{n-1} x}$$

folgen, wenn r_n eine primitive Wurzel von $x^n - 1 = 0$ bedeutet.

> Dieses Princip kommt als solches, als **Princip** zur Geltung, wenn man allgemeiner aus irgend einer Function $f(x)$ (als „Hauptfunction“ anstatt e^x) solche n lineare homogene Functionen von
>
> $$f(\alpha_0 x), f(\alpha_1 x), \ldots, f(\alpha_{n-1} x)$$

als **Cofunctionen** bildet, zwischen denen selbst keine lineare homogene Relation besteht, wobei

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$$

Wurzeln einer „determinirenden" allgemeinen (irreductibeln) algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$\mathfrak{d}(x) = 0$$

bedeuten.

Man wird natürlich durch dieses Princip keine Erweiterung des Gebietes der transcendenten Functionen erwarten können, es werden durch dasselbe keine neuen Transcendenten aus algebraischen Functionen geschaffen, sondern die algebraisch verwandten einer bereits vorhandenen Transcendenten werden gleichzeitig in Betracht gezogen. Aber diese Betrachtungen sind nicht minder wichtig als die der trigonometrischen Functionen neben der Exponentialfunction, oder die der symmetrischen Functionen für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, oder die Zurückführung der Betrachtung einer algebraischen Grösse auf diejenige einer rationalen, indem mit jener die ihr algebraisch conjugirten gleichzeitig in Betracht gezogen werden.

Es erweist sich, wie man im vorliegenden Werke ersehen wird, die Nützlichkeit der Cofunctionen insbesondere theils für die Darstellung und theils für die Entdeckung von Eigenthümlichkeiten solcher Functionen, welche durch gewisse Gleichungen (algebraische, oder Differentialgleichungen) definirt werden.

Die Wahl einer speciellen determinirenden Gleichung, wie etwa der binomischen $x^n - 1 = 0$, hat, wo es nützlich ist, genau denselben Sinn wie die in der Analysis oft anzutreffende Zurückführung auf Normaltypen.

Ebenso und zuweilen mit grösserem Vortheil kann man eine andere Abel'sche Gleichung zu Grunde legen; zuweilen

wird es vortheilhafter sein, eine Geichung mit lauter reellen, aber von einander verschiedenen Wurzeln zu Grunde zu legen. Auch die Irreductibilität ist nicht durchaus nothwendig; nur wird man, wenn eine reductibele Gleichung als determinirende genommen wird, als Fundamentalsystem die Cofunctionen erst — wenn z. B. Gruppen von gleichen Wurzeln vorhanden sind, gruppenweise — mit gewissen ganzen Functionen multipliciren. Für verschiedene Fragen ist es sogar zweckmässig, ein System von verschiedenen Normaltypen gleichzeitig zu Grunde zu legen; auch kommt es vor, dass mehr als eine Hauptfunction nothwendig wird. Indess schien es angemessen zu sein, den ersten Fall $x^n - 1 = 0$ zuerst mit grösserer Ausführlichkeit und ausschliesslich zu behandeln und erst später auf jene Erweiterungen einzugehen, wiewohl in manchen Fällen andere Wahlen gewisse Complicationen beseitigt oder Beschränkungen leichter aufgehoben hätten.

Seit der Entstehung dieser Gedanken sind dem Verfasser bereits mehr denn zwölf Jahre verflossen. (Der Vortrag „Gegenseitigkeit von Partial- und circumplexen Functionen und Reihen“ ist am 19. Sept. 1879 gehalten und im Tageblatt der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte erschienen.) In dieser Zeit hat sich wohl das Gebiet der Anwendungen bedeutend erweitert; erwähnenswerth dürften folgende sein:

1. Einheitliche Lösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade und einiger speciellen Gleichungen. (Doctordissertation 1880; Abschnitt III des gegenwärtigen ersten Bandes.)
2. Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, von einem Gesichtspunkte ausgehend, der eine Erweiterung für eine analoge Classe nichtlinearer Differentialgleichungen ermöglicht. (Vorlesungen in verschiedenen Semestern, zum erstenmal im Sommersemester 1884 gehalten an der

Universität zu Heidelberg; Abschnitte VI und VII des gegenwärtigen I. Bandes.)

3. Darstellung der Wurzeln einer allgemeinen algebraischen Gleichung mit constanten, oder variabeln Coefficienten, mit Hülfe von Cofunctionen aus Potenzreihen; mit vollständiger Durchführung einiger Beispiele: a) binomische Gleichungen, b) Gleichungen der ersten fünf Grade, c) trinomische Gleichungen. (Habilitationsschrift 1883; Abschnitt VIII des gegenwärtigen Bandes.)
4. Darstellung der Integrale einer Classe nichtlinearer Differentialgleichungen in der Umgebung eines Punktes, für welchen die Coefficienten unendlich, oder unbestimmt werden, mit Hülfe von Cofunctionen zweiter Stufe. (Vorlesungen, gehalten im Sommersemester 1885, Wintersemester 1886—87; die letzten Abschnitte dieses Bandes.)
5. Uebertragung einiger Begriffe auf das Gebiet der Zahlentheorie: „arithmetische Cofunctionen". (Begründung zum erstenmal in diesem Bande aufgenommen.)

Dagegen kann sich der Verfasser keineswegs der Ueberzeugung verschliessen, dass auf jedem einzelnen der genannten Gebiete noch gar viel geschehen müsste, um gewisse fundamentale Fragen abgerundet zu beantworten, um manche unnöthige Complication in Form und Inhalt zu beseitigen, um manches Nebensächliche wegzulassen und manches wesentlich Fehlende hinzuzufügen. Gerade die Beschäftigung mit Erweiterungen des Gesichtskreises, welche sich von selbst aufdrängten und mit Principien*), welche ursprünglich sich

*) Besonders erwähnenswerth ist das Princip allgemeiner algebraischer und analytischer Iterationen, welches (wie ich theils gezeigt und theils noch zeigen werde) berufen ist, neue Transcendenten in die Analysis einzuführen und sogar, wie ich zeigen werde, als natürliche Quelle der Transcendenten überhaupt aufgefasst werden kann.

aus jenen entwickelten, später aber selbstständig wurden und sich bedeutend ausdehnten, war es zum Theil, zum Theil auch mancher harte Schicksalsschlag des Lebens, welche es dem Verfasser bisher unmöglich machten, gar Manches, was er gewünscht hätte, zu einer Abrundung beizutragen.

Trotzdem entschloss ich mich endlich — nach langem Zögern, aber auch nach reiflicher Ueberlegung — zur Veröffentlichung.

Wenn unbefangene Gelehrte nur finden sollten, dass (von Nebensächlichem wie etwa Benennungen und Bezeichnungen abgesehen) in der Hauptsache doch ein gesunder methodischer Kerngedanke vorhanden sei, welcher sich für die Mathematik fruchtbar machen lässt, so würde auch diese Anerkennung mir schon Belohnung genug sein.

Heidelberg, December 1891.

Der Verfasser.

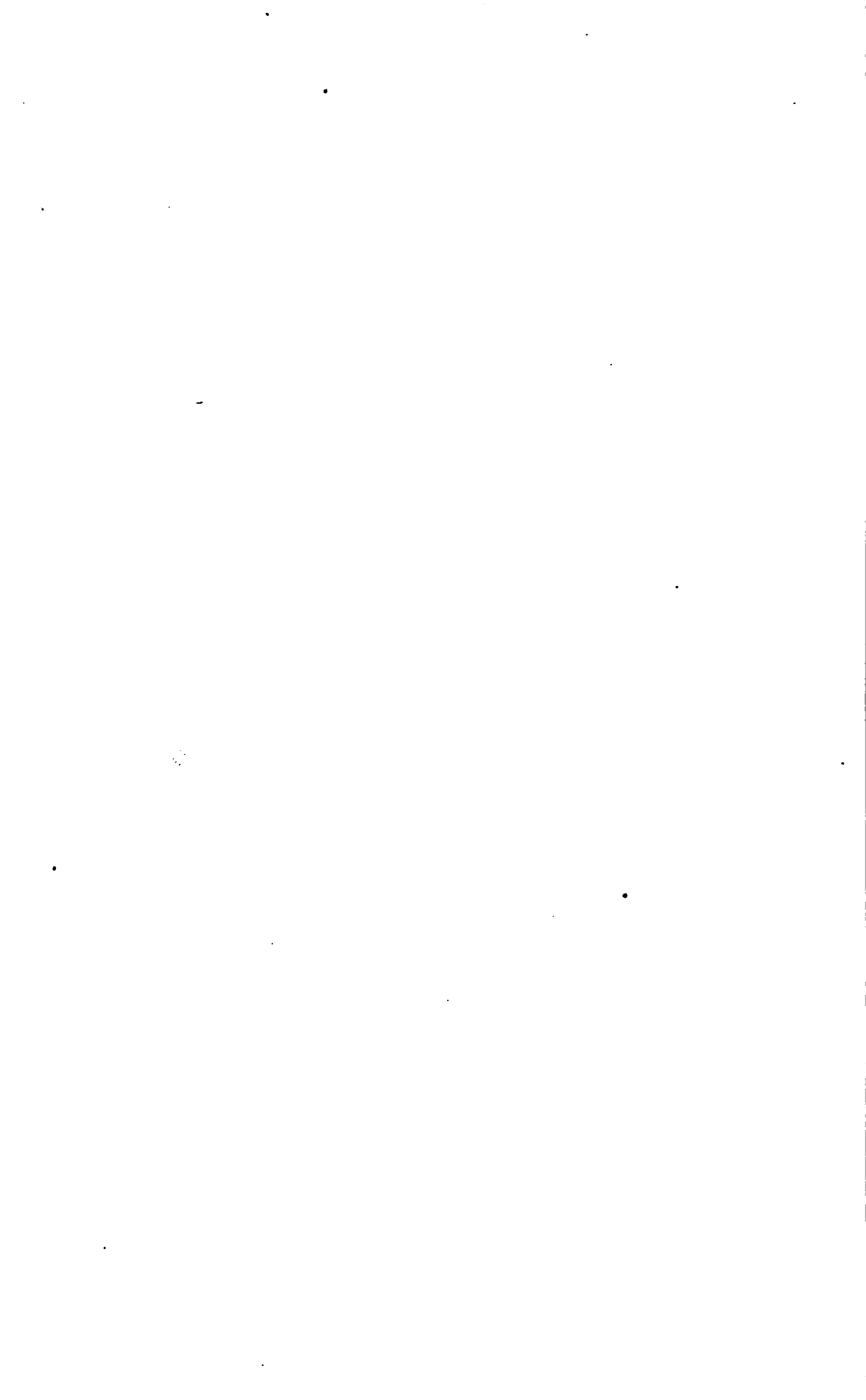
ABSCHNITT VIII.

DARSTELLUNG DER WURZELN EINER ALLGEMEINEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG n^{ten} GRADES

MIT HÜLFE VON

COFUNCTIONEN AUS POTENZREIHEN

IN ELEMENTARER BEHANDLUNGSWEISE.



Einleitung.

§ 1.

Erinnerung an einige frühere Ergebnisse, welche für die Folge wichtig sind*).

a) Nachdem ich gezeigt habe, dass die Beziehungen, die zwischen den coordinirten Cofunctionen obwalten, eine einheitliche Lösung algebraischer Gleichungen der ersten vier Grade sowohl, wie die einiger Gleichungen von ganz specieller Natur (der Gleichungen mit lauter gleichen Wurzeln und binomischen Gleichungen, die den einfachsten Fall von solchen, welche lauter verschiedene Wurzeln haben, bilden) in der natürlichsten Weise lieferten, will ich nunmehr zeigen, wie dieselben Beziehungen auch für den allgemeinsten Fall einer Gleichung n^{ten} Grades mit variablen Coefficienten als natürlichster Ausgangspunkt zur Lösung dienen können, wenn die Lösung auch, natürlich, nicht mehr in geschlossner Form (nach dem Abel'schen Beweise ist ja dieses ohne Einführung von Transcendenten schlechterdings unmöglich), sondern in Form von Potenzreihen zum Vorschein kommt.

b) Es sei die Gleichung n^{ten} Grades nach z in der Form

$$(\lambda) \quad F(z, x) = z^n + \varphi_{n-1}(x) z^{n-1} + \varphi_{n-2}(x) z^{n-2} + \cdots \\ \cdots + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0$$

*) Es sind dieses Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verfassers, welche unter dem Titel „Lineare homogene Cofunctionen" von der Facultät der Univ. Heidelberg als Doctor-Dissertation genehmigt wurde, zuerst im Russischen vollständig und darauf im Deutschen, als Vortrag zu Salzburg, vorläufig nur im Auszuge erschienen war; nunmehr aber ausführlich mitsammt dem gegenwärtigen Abschnitte, der 1883 als Habilitationsschrift diente, in diesem Werke unter Anderem aufgenommen wird. Die in dieser Einleitung gegebene kurze Repetition dürfte ausreichen, damit das Folgende für sich allein gelesen werden könnte.

gegeben, wobei die Coefficienten von z gewisse Potenzreihen einer Variabeln x, von der Form

$$\varphi_k(x) = \alpha_{k,0} + \alpha_{k,1} x + \alpha_{k,2} x^2 + \cdots + \alpha_{k,q} x^q + \cdots$$

sein sollen, indem k einen der n ganzzahligen Werthe

$$k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1$$

annimmt, und die Grössen $\alpha_{k,q}$ ganz beliebige Constanten sind, welche jedoch der Bedingung genügen, dass sämmtliche $\varphi_k(x)$ in einem und demselben Gebiete von x in der Umgebung von $x = 0$ (oder ebenso für die Umgebung des Punctes $x = b$, wenn die Potenzreihen $\varphi_k(x - b)$ nach Potenzen von $x - b$ fortschreiten) convergent*) sind. Wir können uns dann auch hier, ganz analog, wie wir es bei Gleichungen der ersten vier Grade mit constanten Coefficienten gethan haben, die Frage stellen, ob und unter welchen Umständen man mit Hülfe unserer Fundamentalformeln für die symmetrischen Functionen der Cofunctionen eine Potenzreihe

$$(\mu) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_q x^q + \cdots$$

als Hauptfunction derart bestimmen kann, dass entweder die n circumplexen**) Functionen n^{ter} Classe

$$f(r_n^h x), \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots, n - 1),$$

*) Zur Vermeidung unnöthiger Complicationen wollen wir ein für allemal die Voraussetzung machen, dass überall, wo wir mit unendlichen Reihen zu operiren haben, solche gemeint sind, bei denen die Reihen der Moduli convergent sind, wenn nicht das Gegentheil gesagt werden wird.

**) Diese Benennung habe ich in meinen bereits früher genannten und in anderen Schriften eingeführt. Obgleich dieselbe nicht als eine glückliche zu bezeichnen ist, so habe ich mir dennoch erlaubt, dieselbe in der gegenwärtigen Abhandlung beizubehalten, um hierdurch etwaige für das Verständniss des Zusammenhangs mit meinen früheren Arbeiten entstehende Schwierigkeiten zu vermeiden.

Uebrigens habe ich in der Einleitung zu den ersten Abschnitten des oben angeführten Werkes § 1 diese Benennung dadurch gerechtfertigt, dass „circumplex" eigentlich synonym ist mit „complex", und die sogenannten complexen Grössen bilden ja nur einen speciellen Fall von den Unsrigen für $n = 4$, da $\sqrt{-1}$ eine primitive Wurzel von

$$x^4 - 1 = 0$$

ist. Ausserdem sollte noch „circum" an den Kreisumlauf erinnern, in welchem der successive Uebergang durch die verschiedenen circumplexen Functionen cyclisch geschieht.

wobei r_n eine primitive Wurzel der Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

bedeutet, oder die n coordinirten Partialfunctionen derselben Classe

$$(\nu)\quad f_{n,i}(x) = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + a_{2n+i} x^{2n+i} + \cdots + a_{qn+i} x^{qn+i} + \cdots$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

für jeden Werth von x in einem gewissen gemeinschaftlichen Convergenzgebiete der Coefficienten $\varphi_k(x)$ der gegebenen Gleichung direct die n Wurzeln derselben Gleichung bilden.

Nehmen wir zunächst den *einen* Fall an, es sollen die n circumplexen Functionen von $f(x)$ die n Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades nach z

$$(\lambda)\qquad F(z, x) = 0$$

für jeden Werth von x innerhalb eines endlichen Gebietes liefern.

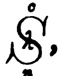
c) Bezeichnet man die n-reihige cyklosymmetrische Determinante, deren Elemente die n kurz bezeichneten Partialfunctionen $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ sind, (wobei also $p_i = f_{n,i}(x)$ ist) wie früher mit

$$\mathscr{D}(p) = \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_{n-1} & \cdots & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & p_0 \end{vmatrix}$$

und die Summe derjenigen Determinanten, welche man aus $\mathscr{D}(p)$ erhält, indem man in derselben je k Zeilen und je k zugehörige Colonnen, welche sich in der Nulldiagonale (Hauptdiagonale) schneiden, streicht, symbolisch mit

$$\sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p),$$

und endlich noch die Summe der Producte zu je λ aus den kurz bezeichneten circumplexen Functionen $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ $\big($wobei also $c_h = f(r_n^h x)$ ist$\big)$ wieder mit



so haben wir aus unseren allgemeinen Relationen

$$\overset{c}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{n-k} = \sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p), \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

die n Gleichungen:

$$(0') \qquad \overset{c}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{n} = \mathscr{D}(p) = \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_{n-1} & \cdots & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & p_0 \end{vmatrix} = (-1)^n \varphi_0(x),$$

$$(1') \qquad \overset{c}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{n-1} = \mathscr{D}^{(\bar{1})}(p) = n \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-1} & \cdots & p_2 \\ p_1 & p_0 & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & p_0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \varphi_1(x),$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$(k') \qquad \overset{c}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{n-k} = \sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p) \qquad\qquad = (-1)^{n-k} \varphi_k(x),$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$(n-2') \qquad \overset{c}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{2} = n \left\{ \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-1} \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_0 & p_{n-2} \\ p_2 & p_0 \end{vmatrix} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \begin{vmatrix} p_0 & p_{E\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\ p_{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} & p_0 \end{vmatrix} + \left(E\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{n-1}{2}\right) \begin{vmatrix} p_0 & p_{\frac{n}{2}} \\ p_{\frac{n}{2}} & p_0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (-1)^2 \varphi_{n-2}(x),$$

$$(n-1') \qquad \overset{c}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{1} = n p_0 = - \varphi_{n-1}(x).$$

Dabei bedeutet in der vorletzten Gleichung $E\left(\frac{n}{2}\right)$ in bekannter Weise die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Ist nun n eine gerade Zahl, so ist $E\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$ und das letzte

in der geschlungenen Klammer enthaltene Glied erhält den Factor $\frac{1}{2}$ vor sich und die vorletzte Determinante heisst dann

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_{\frac{n}{2}+1} \\ p_{\frac{n}{2}-1} & p_0 \end{vmatrix}.$$

Ist aber n ungerade, so ist $E\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n-1}{2}$ und ebenso $E\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}$, während $E\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$ ist, so dass das letzte Glied in diesem Falle verschwindet und das vorletzte Glied, in der Form

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_{\frac{n+1}{2}} \\ p_{\frac{n-1}{2}} & p_0 \end{vmatrix},$$

erscheint dann als letztes Glied, wie es kommen muss.

§ 2.

Einige Eigenschaften der obigen Determinanten.

a) Die cyklosymmetrische Determinante $\mathscr{D}(p)$ ist so construirt, dass die Elemente der Hauptdiagonale aus lauter p_0 und alle Parallelen zur Hauptdiagonale der Reihe nach aus lauter $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ oberhalb und ganz ebenso aus lauter $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ unterhalb der Nulldiagonale bestehen, so dass die Elemente $a_{j,k}$ und $a_{k,j}$ (d. h. solche, welche in gleicher Distanz von der Hauptdiagonale und auf einer zur sogenannten zweiten Diagonale parallelen Linie liegen) Indices besitzen, die sich zu n ergänzen.

b) Was die übrigen Determinanten betrifft, so entstehen für $k = 1$ aus den verschiedenen Möglichkeiten für die Wahl der zu streichenden Reihen n gleiche $(n - 1)$-reihige Determinanten, deren Hauptdiagonale wiederum aus lauter p_0 und die Parallelen zu derselben oberhalb jeweils aus $p_2, p_3, \cdots, p_{n-1}$, unterhalb aus $p_1, p_2, \cdots, p_{n-2}$ bestehen.

Ist $k > 1$ und ist $\binom{n}{k} = Q \cdot n + R$, wobei $R < n$ ist, so sind Q Gruppen von je n gleichen Determinanten vor-

handen, welche solchen Fällen der gestrichenen Reihen entsprechen, wo die Distanzen zwischen den einzelnen Zeilen in dem *einen* Falle den *entsprechenden* in dem *andern* Falle beziehungsweise gleich sind (wenn sie auch in jedem einzelnen Falle unter einander verschieden sein können) und somit die Freiheit der Wahl sich lediglich auf die cyklische Verschiebung des zu wählenden Systems beschränkt. Ausser diesen Q Gruppen tritt noch *eine* Gruppe von R einander gleichen Determinanten auf, wobei aber R unter Umständen, $\Big($wenn $\binom{n}{k}$ durch n theilbar ist, was z. B. wenn n eine Primzahl ist, für alle k der Fall sein muss$\Big)$ auch Null sein kann.

Unter allen diesen $Q+1$, oder Q im Allgemeinen verschiedenen Determinanten bleiben die zwei Eigenschaften bestehen, dass 1) *die Hauptdiagonalen aus lauter* p_0 *bestehen, und dass* 2) *die Summe der Indices zweier Elemente, welche in gleichem Abstande zu verschiedenen Seiten der Hauptdiagonale auf einer parallelen Linie zur zweiten Diagonale sich befinden, immer gleich* n *ist.*

c) Die Glieder in der ausgerechneten Determinante $\mathcal{D}^{(\bar{k})}(p)$ sind alle 1) *von der Dimension* $n-k$ und 2) *vom Gewichte* (Summe der Producte der Exponenten mit den entsprechenden Indices eines jeden Factors eines Gliedes)

$$G \equiv 0 \text{ (mod. } n).$$

Die Eigenschaft (1) ist bei einer $(n-k)$-reihigen Determinante selbstverständlich, und ist dieselbe (ebenso wie die obigen aus der Construction sich unmittelbar ergebenden Eigenschaften) nur deshalb in Erwähnung gekommen, weil wir später davon Gebrauch zu machen haben.

Die Richtigkeit der Eigenschaft (2) ist in folgender Weise leicht einzusehen. Da

$$\sum \mathcal{D}^{(\bar{k})}(p) = \mathop{\mathfrak{S}}_{n}^{c} {}_{n-k} \quad \text{und} \quad c_h = \sum_{0}^{n-1}{}_i\, r_n^{hi}\, p_i$$

ist, so wird jedes Glied in $\mathop{\mathfrak{S}}_{n}^{c} {}_{n-k}$, nämlich:

$$c_{h_1} \cdot c_{h_2} \cdots c_{h_{n-k}} = \prod_0^{n-k}{}^{\lambda} \left\{ \sum_0^{n-1}{}^{i} r_n^{h_\lambda i} p_i \right\}$$

aus Gliedern bestehen, die die allgemeine Form

$$r_n^{h_l(\mu_1 \cdot i_1 + \mu_2 \cdot i_2 + \cdots + \mu_n \cdot i_n)} \cdot p_{i_1}^{\mu_1} \cdot p_{i_2}^{\mu_2} \cdots p_{i_n}^{\mu_n}$$

haben, wobei jedes i respective jedes μ einen der Werthe

$$i_q = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$
$$\mu_s = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

annimmt. Nun kommt aber in $\mathscr{D}(p)$ folglich auch $\mathscr{D}^{(k)}(p)$ die Grösse r_n gar nicht vor; es muss also, da hier zwei gleiche und entgegengesetzte Glieder nicht vorkommen können, nothwendig

$$\mu_1 \cdot i_1 + \mu_2 \cdot i_2 + \cdots + \mu_n \cdot i_n = G \equiv 0 \pmod{n}$$

sein, w. z. b. w.

d) Nach diesen Bemerkungen sind unsere n Gleichungen in p respective vom Grade

$$n, (n-1), \cdots, n-k, \cdots, 2, 1.$$

Wollte man daher im allgemeinen Falle für ein beliebiges n aus diesen Gleichungen, ebenso wie wir es mit den Gleichungen der ersten vier Grade wirklich leicht ausgeführt haben, die p ohne Weiteres durch Elimination berechnen, so würde man immer auf Gleichungen von viel höherem Grade als dem der vorgelegten Gleichung kommen. Schon für $n = 3$ und $n = 4$ trat dieses ein; jedoch waren dort die Resolventen leicht reductibel, was aber für $n > 4$, wie es nach dem bekannten Abel'schen Beweise zu erwarten ist, aufhört; und für steigende n complicirt sich die Resolvente immer mehr und mehr.

e) Ganz anders verhält sich aber die Sache, wenn man die in diesen bedingungsgemäss identischen Gleichungen angedeuteten Rechnungen mit den wirklichen Potenzreihen, welche einerseits als Partialfunctionen mit noch zu bestimmenden a_q:

$$p_i = f_{n,i}(x) = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + \cdots + a_{qn+i} x^{qn+i} + \cdots,$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

und andrerseits als gegebene Coefficienten der Gleichung

$$\varphi_k(x) = \alpha_{k,0} + \alpha_{k,1}x + \alpha_{k,2}x^2 + \cdots + \alpha_{k,p}x^p + \cdots$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

auftreten, ausführt, um Recursionsformeln zur Bestimmung der a durch die α dadurch herzustellen, dass man die verlangte Gültigkeit dieser Gleichungen, in deren beiden Seiten die in einem gemeinsamen Gebiete bestehenden Potenzreihen sich befinden, benutzt, in jeder Gleichung alles nach einer Seite schafft, nach Potenzen von x ordnet und jeden Coefficienten von x für sich verschwinden lässt*).

Es wird sich zeigen, dass durch die Einführung des irrationalen Begriffes der unendlich oftmal zu wiederholenden Operationen der Grad der einzelnen Bedingungsgleichungen in jeder der vorzunehmenden Operationen dafür auf sein Minimum herabgesetzt wird. *Wir werden nämlich zum Behufe der Bestimmung jener Coefficienten a der verlangten Hauptfunction* $f(x) = \sum_0^\infty {}^q a_q x^q$ *nur eine einzige binomische Gleichung* n^{ten} *Grades und dann für je* $(n-1)$ *aufeinanderfolgende Coefficienten je ein System von* $(n-1)$ *linearen Gleichungen aufzulösen haben***), *worin je* $(n-1)$ *solcher Coef-*

*) Da unsere Determinanten, so lange n endlich ist, ganze rationale Functionen von jenen Partialfunctionen sind, so genügt vorläufig zur Rechtfertigung unseres Verfahrens die bekannte Bemerkung: „Ist F eine ganze rationale Function von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, wobei diese φ gewisse Functionen von $x, y, \ldots$ sind, welche sich nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen in Reihen entwickeln lassen, und substituirt man in F für die φ die entsprechenden Potenzreihen und entwickelt dann F in combinatorischer Weise in eine Reihe nach Potenzen von $x, y, \ldots$, so ist diese letztere stets *unbedingt* convergent und ihre Summe ist gleich F für alle diejenigen Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Reihenentwickelungen von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ es *sämmtlich* sind". (Weierstrass, Ueber die analytischen Facultäten; Crelle's Journal, Bd. 51, Nr. 7, (4).) Wollte man aber unsere Methode auch für den Fall eines unendlich grossen n, also zur *Aufsuchung der Nullstellen einer Potenzreihe* anwenden, worauf ich in der gegenwärtigen Abhandlung noch nicht näher eingehen möchte, so würde man noch die Bemerkungen (5), (A), (B) derselben Nr. in der angeführten Abhandlung zu berücksichtigen haben.

**) Eigentlich bestimmen sich diese Coefficienten gruppenweise zu je n aufeinanderfolgenden; jedoch so, dass einer derselben immer

ficienten a immer durch die als gegeben vorausgesetzten Grössen α und durch vorhergehende a (welche durch die frühern α aus einem vorhergegangenen Systeme bereits bestimmt wurden) sich vollkommen und zwar eindeutig berechnen lassen. Und man kann somit aus der gesuchten Reihe so viel Glieder berechnen als man will.

f) Allerdings scheint diese auszuführende Rechnung, wenn auch keine principiellen Schwierigkeiten, so doch viel lästige, ja fast unüberwindliche Mühe zu verursachen. Um diese Mühe zu erleichtern, führe ich eine Operation ein, die an und für sich nicht uninteressant zu sein scheint und bei weiterer Betrachtung (auf welche ich in der gegenwärtigen Arbeit, um den Gedankengang nicht zu viel zu unterbrechen, nicht weiter eingehen möchte), sogar verspricht, eine Grundlage zu einer nützlichen Darstellungsweise werden zu können. Diese Operation soll hier zunächst kurz begründet werden, dann soll eine kurze Anleitung zur Handhabung derselben folgen. Es wird sich dann zeigen, dass beliebige ganze Functionen von i^{ten} Partialfunctionen n^{ter} Classe (worunter, je nach dem Werthe von n und i, jede allgemeine Potenzreihe enthalten sein kann) sich mit Hilfe dieser Operation wieder als solche Potenzreihen leicht formal so darstellen lassen, dass gewisse Eigenschaften schon durch die Form selbst sich kundgeben.

---

direct durch eine für ihn bestehende identische lineare Gleichung separat bestimmt wird, während die übrigen $(n-1)$ aus einem Systeme von $(n-1)$ linearen Gleichungen durch die vorhergehenden Coefficienten ausgedrückt werden.

Erstes Capitel.

sd-Operation; oder Substitutional-Differentiation.*)

§ 3.

Definition und einige Folgerungen.

a) Es sei eine aus Differentiation und Substitution zusammengesetzte Operation für eine beliebige, eine Ableitung besitzende Function einer Variabeln u_1, etwa $F(u_1)$, oder auch eine Function $F(u_{1_1}, u_{1_2}, \ldots)$ mehrerer Variabeln $u_{1_1}, u_{1_2}, \ldots$, wobei der Zusammenhang unter den u ganz beliebig gedacht werden kann, unter folgender Definition eingeführt.

Man bilde im ersten Falle das Differential der gegebenen Function nach der Variabeln u_1, also

$$d\,F(u_1) = F'(u_1) \cdot du_1,$$

dann denke man sich mit Bezug auf den Index von u_1 die Substitution $\begin{bmatrix} z+n \\ z \end{bmatrix}$ ausgeübt und bezeichne diese Operation mit s_n, so dass

$$s_n(u_1) = u_{n+1}$$

wird; darauf ersetze man in dem Ergebnisse der ersten Operation den Factor $d(u_1)$ durch $s_n(u_1)$, oder, mit andern Worten, man übe die Substitution $\begin{bmatrix} s_n(u_1) \\ d(u_1) \end{bmatrix}$ aus, und bezeichne dann die ganze so zusammengesetzte Operation mit dem Symbol $s_{n,1}\,d$, oder auch einfacher $s_n d$, oder, wo keine besondere Veranlassung zu Missverständnissen vorhanden ist, auch schlechtweg mit sd, so dass im Ganzen als Resultat

$$\text{(A)} \qquad s_n d\,F(u_1) = F'(u_1) \cdot u_{n+1}$$

erhalten wird.

---

*) Die Zweckmässigkeit doppelter Benennung, wird später hervortreten.

Die auf diese Weise aus Differentiation und Substitution zusammengesetzte Operation kann man vielleicht „Substitutional-Differentiation“, oder „*sd-Operation*“ und zwar in unserem Falle eine solche „*specielle, lineare, n^{ter} Classe*“ *nennen*.

Eine allgemeine lineare würde sein, wenn anstatt der obigen Substitution die allgemeinere $\left[\begin{matrix} n_1 z + n_0 \\ z \end{matrix}\right]$ ausgeübt worden wäre. Die Erweiterung der Definition für eine Substitution höhern Grades drängt sich von selbst auf und zeigt sich sogar sehr nützlich für die Entdeckung eines merkwürdigen Zusammenhanges; wir bleiben jedoch hier bei dem einfachen Falle vorläufig stehen.

Beispiele.

$$s_n d\left(e^{u_1}\right) = e^{u_1} \cdot u_{n+1},$$

$$s_n d(\sin u_1) = \cos u_1 \cdot u_{n+1},$$

$$s_n d(\log u_1) = \frac{u_{n+1}}{u_1},$$

$$s_n d(u_1^\mu) = \mu u_1^{\mu-1} \cdot u_{n+1}$$

etc.

Von dem letzten Beispiele werden wir besondern Gebrauch zu machen haben.

b) Direct aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar einige Gesetze, die wir sofort hier anführen wollen.

Wird u_1 als eine Constante betrachtet, so ist das Differential nach u_1 und somit auch $s_n d F(u_1)$ Null.

Da das Differential von $AF(u_1)$ gleich dem von $F(u_1)$ multiplicirt mit A ist, und da die angedeutete Substitution von A unabhängig ist, so bildet man offenbar $s_n d(A \cdot F(u_1))$, indem man $s_n d(F(u_1))$ mit der Constanten multiplicirt, also

$$= A \cdot s_n d\,(F(u_1)).$$

Die Formel (A) hat ihre Gültigkeit für jede Function, welche eine Ableitung hat, also ganz besonders im letzten Beispiele $F(u_1) = u_1^\mu$ für jedes beliebige μ, weil die Differentiation immer gültig, während die Substitution von μ überhaupt unabhängig ist.

Ebenso klar ist es, dass man das Resultat unserer *sd*-Operation aus einer algebraischen Summe mehrerer Functionen

$F_1(u_{\mathfrak{l}_1}) \pm F_2(u_{\mathfrak{l}_2}) \pm F_3(u_{\mathfrak{l}_3}) \pm \cdots$ beziehungsweise je einer Variabeln $u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, u_{\mathfrak{l}_3}, \cdots$, wobei auf alle $\mathfrak{l}$ dieselben entsprechenden Substitutionen

$$\begin{bmatrix} z_1 + n \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_2 + n \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_3 + n \\ z_3 \end{bmatrix}, \ldots$$

ausgeübt werden sollen, dadurch erhält, dass man die algebraische Summe der sd-Operationen derselben Classe aller einzelnen Glieder bildet. — Stellen wir diese elementaren Gesetze zusammen, so haben wir zunächst die Formeln

(1) $s_n d\,(\text{Const.}) = 0$;

(2) $s_n d(A \cdot F(u_{\mathfrak{l}})) = A \cdot s_n d(F(u_{\mathfrak{l}}))$;

speciell:

$$s_n d(A u_{\mathfrak{l}}^m) = A \cdot m u_{\mathfrak{l}}^{m-1} u_{n+\mathfrak{l}}; \quad s_n d(u_{\mathfrak{l}}^{-m}) = -m u_{\mathfrak{l}}^{-(m+1)} \cdot u_{n+\mathfrak{l}};$$

(3) $s_n d(u_{\mathfrak{l}}) = s_n d(u_{\mathfrak{l}}^1) = u_{n+\mathfrak{l}} = s_n(u_{\mathfrak{l}})$;

(4) $s_n d(F_1(u_{\mathfrak{l}_1}) \pm F_2(u_{\mathfrak{l}_2}) \pm \cdots) = s_n d(F_1(u_{\mathfrak{l}_1})) \pm$
$\pm s_n d(F_2(u_{\mathfrak{l}_2})) \pm \cdots$

Speciell:

$$s_n d\left(u_{\mathfrak{l}_1}^{m_1} \pm u_{\mathfrak{l}_2}^{m_2} \pm \cdots \pm u_{\mathfrak{l}_A}^{m_A}\right) = m_1 u_{\mathfrak{l}_1}^{m_1-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}_1} \pm m_2 u_{\mathfrak{l}_2}^{m_2-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}_2} \pm$$
$$\pm \cdots \pm m_A u_{\mathfrak{l}_A}^{m_A-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}_A}.$$

Aus der letzten Formel ergiebt sich für

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_A = m$$

(resp. für $F_1 = F_2 = \cdots = F_A = F$) und $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_2 = \cdots = \mathfrak{l}_A = \mathfrak{l}$ unter ausschliesslicher Berücksichtigung des obern Vorzeichens rückwärts die Formel (2) für ein ganzzahliges A.

Unter Anderem ist in diesen Formeln auch

$$s_n d\left(A u_{\mathfrak{l}_1}^{m_1} + B u_{\mathfrak{l}_2}^{m_2} + \cdots + K u_{\mathfrak{l}_\varkappa}^{m_\varkappa} + L\right) = A m_1 u_{\mathfrak{l}_1}^{m_1-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}_1} +$$
$$+ B m_2 u_{\mathfrak{l}_2}^{m_2-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}_2} + \cdots + \cdots + K m_\varkappa u_{\mathfrak{l}_\varkappa}^{m_\varkappa-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}_\varkappa}$$

enthalten, welche wir oft gebrauchen werden.

Man kann ferner die Operation für eine Function einer Function, etwa $F(f(u_{\mathfrak{l}}))$ dadurch ausführen, dass man zuerst $dF(f(u_{\mathfrak{l}}))$ nach $u_{\mathfrak{l}}$ bildet und dann $du_{\mathfrak{l}}$ durch $s_n u_{\mathfrak{l}}$ ersetzt, so dass

$$(5)\qquad s_n d\,F(f(u_{\mathfrak{l}})) = \frac{dF(f(u_{\mathfrak{l}}))}{df(u_{\mathfrak{l}})} \cdot f'(u_{\mathfrak{l}}) \,.\, u_{n+\mathfrak{l}},$$

also speciell z. B.

$$s_n d(u_{\mathfrak{l}}^{m_1} + u_{\mathfrak{l}}^{m_2})^{\varkappa} = \varkappa(u_{\mathfrak{l}}^{m_1} + u_{\mathfrak{l}}^{m_2})^{\varkappa-1}(m_1 u_{\mathfrak{l}}^{m_1-1} + m_2 u_{\mathfrak{l}}^{m_2-1})\, u_{n+\mathfrak{l}},$$

was man auch erhalten würde, wenn man den Ausdruck

$$(u_{\mathfrak{l}}^{m_1} + u_{\mathfrak{l}}^{m_2})^{\varkappa}$$

nach dem binomicchen Satze entwickelt hätte und dann $s_n d$ aus jedem einzelnen Gliede gebildet.

Nach ganz analogen Gesetzen kann man die Operation an einer Function mehrerer Variabeln vollziehen; nämlich

$$(6)\qquad s_n d\,F(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}) = s_n \partial_{u_{\mathfrak{l}_1}} F(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}) + s_n \partial_{u_{\mathfrak{l}_2}} F(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}),$$

woraus der Begriff und die Bezeichnung partieller $s\partial$-Operation, (wofern die Substitution für alle Variabeln dieselbe bleibt*)), einleuchtet.

Für das Product zweier Functionen hat man natürlich

$$\begin{aligned} s_n d(F_1(u_{\mathfrak{l}_1}) \cdot F_2(u_{\mathfrak{l}_2})) &= F_2(u_{\mathfrak{l}_2}) \cdot F_1'(u_{\mathfrak{l}_1}) \cdot u_{n+\mathfrak{l}_1} \\ &\quad + F_1(u_{\mathfrak{l}_1}) \cdot F_2'(u_{\mathfrak{l}_2}) \cdot u_{n+\mathfrak{l}_2} \\ &= F_2(u_{\mathfrak{l}_2}) \cdot s_n dF_1(u_{\mathfrak{l}_1}) + F_1(u_{\mathfrak{l}_1}) \cdot s_n dF_2(u_{\mathfrak{l}_2}) \end{aligned}$$

und für $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}$

---

*) Analoge partielle Operationen in Bezug auf die Substitutionen sollen hier ebenso wie noch einige andere mit den obigen verwandte Operationen, zwischen welchen bemerkenswerthe Relationen bestehen, hier vorläufig übergangen werden, weil sie für unser nächstes Ziel nicht nothwendig sind. — Ich möchte jedoch nicht unterlassen, hier noch kurz die umgekehrte Operation zu definiren, welche darauf ausgeht, eine Function $\varphi(u_{\mathfrak{l}})$ zu finden, welche so beschaffen ist, dass, wenn man auf sie die sd Operation ausübt, man eine gegebene Function $\psi(u_{\mathfrak{l}})$ erhält. Bezeichnen wir die auf $\psi(u_{\mathfrak{l}})$ auszuübende Operation mit $s_n i$, so ist sofort einzusehen, dass aus (A) rückwärts folgt

$$(\mathrm{B})\qquad s_n i\,\psi(u_{\mathfrak{l}}) = \left[\int \psi(u_{\mathfrak{l}})\,du_{\mathfrak{l}}\right] \cdot u_{n+\mathfrak{l}}^{-1} + \text{Const.};$$

also speciell:

$$s_n i\,(u_{\mathfrak{l}}^m) = \frac{u_{\mathfrak{l}}^{m+1}}{(m+1)\,u_{n+\mathfrak{l}}} + \text{Const.}$$

Es besteht also die si-Operation aus Integration und Substitution analog, wie die sd-Operation aus Differentiation und Substitution besteht; und wir führen consequenterweise die Benennung „*Substitutional-Integration*“ ein.

$$(7)\quad s_n d(F_1(u_{\mathfrak{l}})\cdot F_2(u_{\mathfrak{l}})) = [F_2(u_{\mathfrak{l}})\cdot F_1'(u_{\mathfrak{l}}) + F_1(u_{\mathfrak{l}})\cdot F_2'(u_{\mathfrak{l}})]\, u_{n+\mathfrak{l}}$$
$$= F_2(u_{\mathfrak{l}})\cdot s_n d\, F_1(u_{\mathfrak{l}}) + F_1(u_{\mathfrak{l}})\cdot s_n d\, F_2(u_{\mathfrak{l}});$$

und ganz analog für den Quotienten

$$(8)\qquad s_n d\left(\frac{F_1(u_{\mathfrak{l}})}{F_2(u_{\mathfrak{l}})}\right) = \frac{F_2\cdot s_n dF_1 - F_1\cdot s_n dF_2}{F_2^2}.$$

Speciell also für $F(u_{\mathfrak{l}}) = u_{\mathfrak{l}}^m$, welcher Fall uns demnächst hauptsächlich beschäftigen wird:

$$(7')\quad s_n d(u_{\mathfrak{l}_1}^{m_1}\cdot u_{\mathfrak{l}_2}^{m_2}) = u_{\mathfrak{l}_1}^{m_1-1}\cdot u_{\mathfrak{l}_2}^{m_2-1}\,(m_1 u_{\mathfrak{l}_2}\cdot u_{n+\mathfrak{l}_1} + m_2 u_{\mathfrak{l}_1}\cdot u_{n+\mathfrak{l}_2}),$$

und weil diese Formel für jedes m gilt, so ist auch der Fall eines Quotienten schon darin enthalten.

Ich übergehe auch hier einige Beziehungen, welche für das Nächstfolgende nicht nothwendig sind.

§ 4.

sd-Operationen höherer Ordnung.

a) Was nun die sd-Operationen höherer Ordnung betrifft, so unterscheiden wir zwei von einander abweichende Auffassungen, welche auch verschieden bezeichnet und zu denselben Zwecken, nur in verschiedener Form, verwendet werden sollen.

α) Die eine Auffassung besteht darin, dass auch zur Bildung des Substitutional-Differentials $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung nach $u_{\mathfrak{l}}$ einer Function $F(u_{\mathfrak{l}})$ zunächst das $\varkappa^{\text{te}}$ Differential nach $u_{\mathfrak{l}}$, also

$$d^\varkappa F(u_{\mathfrak{l}}) = F^{(\varkappa)}(u_{\mathfrak{l}})\cdot du_{\mathfrak{l}}^\varkappa$$

gebildet wird, wie z. B.

$$d^\varkappa(u_{\mathfrak{l}}^m) = m(m-1)\cdots(m-\varkappa+1)\,u_{\mathfrak{l}}^{m-\varkappa}\cdot du_{\mathfrak{l}}^\varkappa,$$

und dann, ganz wie vorhin, $du_{\mathfrak{l}}$ durch $s_n u_{\mathfrak{l}}$, also $(du_{\mathfrak{l}})^\varkappa$ durch $(s_n u_{\mathfrak{l}})^\varkappa$ ersetzt, so dass

$$(\lambda)\qquad s_n^\varkappa d\, F(u_{\mathfrak{l}}) = F^{(\varkappa)}(u_{\mathfrak{l}})\cdot u_{n+\mathfrak{l}}^\varkappa,$$

also in unserm speciellen Beispiele:

$$(\lambda')\quad s_n^\varkappa d(u_{\mathfrak{l}}^m) = m(m-1)\cdots(m-\varkappa+1)\,u_{\mathfrak{l}}^{m-\varkappa}\cdot u_{n+\mathfrak{l}}^\varkappa$$

erhalten wird, worin die Formeln (A) und (A') des vorigen Paragraphen für $\varkappa = 1$ enthalten sind.

Führt man jetzt nach dieser Vorschrift die $(\varkappa_1 + 1)^{\text{te}}$ sd-Operation von $F(u_\mathfrak{l})$ aus, so erhält man nach (λ) für $\varkappa = \varkappa_1 + 1$:

$$s_n^{\varkappa_1+1} d\, F(u_\mathfrak{l}) = F^{(\varkappa_1+1)}(u_\mathfrak{l}) \cdot u_{n+\mathfrak{l}}^{\varkappa_1+1} \cdot$$

Setzt man andrerseits in (λ) den Werth $\varkappa = \varkappa_1$ und führt die substitutionelle Differentiation in beiden Seiten der Gleichung (λ) aus, so bekommt man nach (7) im vorigen Paragraphen

$$s_n^{\varkappa_1+1} d\, F(u_\mathfrak{l}) = u_{n+\mathfrak{l}}^{\varkappa_1} \cdot F^{(\varkappa_1+1)}(u_\mathfrak{l})\, u_{n+\mathfrak{l}} + F^{(\varkappa_1)}(u_\mathfrak{l}) \cdot s_{n,\mathfrak{l}} d\, (u_{n+\mathfrak{l}}^{\varkappa_1}) \,.$$

Vergleicht man die letzten zwei Resultate, so sieht man, dass direct aus unserer Definition die Consequenz fliesst, dass bei der Ausübung der sd-Operation auf $[s_n^{\varkappa'} dF(u_\mathfrak{l})]$ der Factor $u_{n+\mathfrak{l}}$ als nach $u_\mathfrak{l}$ constant aufzufassen ist.

Besitzt F mehrere Grössen $u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, u_{\mathfrak{l}_3}, \ldots$ die alle als variabel betrachtet werden, so wird das totale Substitutional-Differential zweiter Ordnung z. B. ganz analog, wie in solchem Falle das gewöhnliche Differential zweiter Ordnung gebildet:

$$\begin{aligned} s_n^2 d(F(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, u_{\mathfrak{l}_3}, \cdots)) &= s_n^2 \partial_{u_{\mathfrak{l}_1}} F + s_n^2\, \partial_{u_{\mathfrak{l}_2}} F + s_n^2 \partial_{u_{\mathfrak{l}_3}} F + \cdots \\ &+ 2 s_n \partial_{u_{\mathfrak{l}_1}} s_n \partial_{u_{\mathfrak{l}_2}} F + 2 s_n\, \partial_{u_{\mathfrak{l}_1}} s_n \partial_{u_{\mathfrak{l}_3}} F + 2 s_n \partial_{u_{\mathfrak{l}_2}} s_n\, \partial_{u_{\mathfrak{l}_3}} F + \cdots \end{aligned}$$

und ebenso weiter für $\varkappa = 3, 4, \ldots$, wozu also die obige Definition vollkommen ausreicht, wenn man nur noch für die Wiederholung des Verfahrens das Gesetz der Commutativität der partiellen Operationen in Bezug auf die einzelnen Variabeln, wie es bei der Differentiation und der Multiplication stattfindet, auch in unsrem Falle, wo wir es mit jenen beiden Operationen zu thun haben, bestätigt findet. Es ist aber in der That leicht einzusehen, dass

$$s_n \partial_{u_\mathfrak{l}} (s_n \partial_{v_\mathfrak{l}} F(u_\mathfrak{l}, v_\mathfrak{l})) = s_n \partial_{v_\mathfrak{l}} (s_n \partial_{u_\mathfrak{l}} F(u_\mathfrak{l}, v_\mathfrak{l}))$$

ist, wenn man die vorgeschriebenen Operationen nach der Definition ausführt.

Eine scheinbare Schwierigkeit könnte in dem Falle eintreten, wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots$ selbst lineare Ausdrücke von n und $\mathfrak{l}$, etwa

$$\mathfrak{l}_1 = q_1 n + \mathfrak{l};\ \mathfrak{l}_2 = q_2 n + \mathfrak{l};\ \mathfrak{l}_3 = q_3 n + \mathfrak{l}, \ldots$$

sind, weil einerseits die durch die Operation hinzutretenden Factoren $u_{qn+\mathfrak{l}}$ bei der Wiederholung der Operation als constant gelten, während die ebenso aussehenden Grössen $u_{q_1 n+\mathfrak{l}}$, $u_{q_2 n+\mathfrak{l}}$, etc., welche in F vor Beginn der Operation sich schon befanden, als Variable betrachtet werden sollen. — Man hilft sich dann wie gewöhnlich in solchen Fällen einfach dadurch, dass man vor Ausübung der Operation in F für

$$q_1 n + \mathfrak{l},\ q_2 n + \mathfrak{l},\ q_3 n + \mathfrak{l}, \ldots$$

resp. die Werthe $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots$ einsetzt, die Operation

$$s_n^x\, dF(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, u_{\mathfrak{l}_3}, \ldots)$$

dadurch ausführt, dass man die partiellen Operationen nach den Variabeln $u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, u_{\mathfrak{l}_3}, \ldots$ definitionsgemäss (die durch die Operation hinzutretenden Factoren als constant betrachtet) bildet und dann nach *vollkommen* ausgeführter Operation die Werthe von $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots$ wieder einsetzt.

Diese Bemerkung ist für die Folge wichtig.

β) Eine zweite Auffassung soll darin bestehen, dass zum Behufe wiederholter Ausführung der Operation als Argument das *volle* Resultat der einmal bereits ausgeführten Operation zu Grunde gelegt wird, so dass die nächstfolgende Wiederholung der Operation sich nicht auf die ursprüngliche Function zurückbezieht, sondern auf den *vollen* durch den bis dahin durch Ausübung der Operationen bereits gewonnenen Ausdruck, mithin auch in Bezug auf den darin enthaltenen Substitutionsfactor ($s_n u_{\mathfrak{l}} = u_{n+\mathfrak{l}}$) die volle Operation ausgeführt werden muss. Bezeichnet man die auf diesem Princip beruhende Operation, zum Unterschiede von der obigen, mit $S_n d$, so soll also sein:

$$S_n^2 d(F(u_{\mathfrak{l}})) = S_n d(S_n d\, F(u_{\mathfrak{l}})) = S_n d\,(F'(u_{\mathfrak{l}}) \cdot u_{n+\mathfrak{l}}),$$

indem wir nämlich das, was sich auf die Substitational-Differentiation *erster Ordnung* bezieht, auch bei dieser zweiten Art alles beim Alten lassen.

Es ist somit in allen Beziehungen

$$S_n d\, F(u_{\mathfrak{l}}) = s_n\, dF(u_{\mathfrak{l}}),$$

d. h. es finden auch für $S_n d$, so lange man bei der ersten Ordnung bleibt, sämmtliche im vorigen Paragraphen angeführten Gesetze statt. Darnach folgt aber dann weiter:

$$S_n^2 d\, F(u_1) = u_{n+1} \cdot S_n d\,(F'(u_1)) + F'(u_1) S_{n,1}\, d(u_{n+1})$$
$$= F^{(2)}(u_1) \cdot u_{n+1}^2 + F'(u_1) \cdot S_{n,1}\, d\,(u_{n+1}).$$

In diesem letzten Ausdrucke kommt noch ein Factor $S_{n,1}\, d\,(u_{n+1})$ zum Vorschein, über dessen Bedeutung bis jetzt noch nichts bestimmt worden ist. Denn wollte man hierbei von der Definition für $s_n d$ (welche für die Operation erster Ordnung auch bei $S_n d$ doch bestehen bleiben soll) ausgehen, so müsste man das Differential von u_{n+1} nach u_1 bilden (da wir doch hier nach u_1 operiren) und wir sahen oben, dass bei $s_n d$ der Factor u_{n+1} als von u_1 unabhängig betrachtet wurde; es wäre somit das Differential und mithin, wenn die ursprüngliche Definition auch hier bestehen soll, auch $S_{n,1}\, d\,(u_{n+1})$, also der ganze zweite Theil gleich Null.

Man hätte demnach

$$S_{n,1}^2\, d\, F(u_1) = F^{(2)}(u_1) \cdot u_{n+1}^2,$$

d. h. auch in der zweiten Ordnung würde

$$S_n^2\, d\,(F(u_1)) = s_n^2\, d\,(F(u_1))$$

sein u. s. w. und wir würden sonach gar keine zwei verschiedenen Operationen bekommen. Aus weiter sich ergebenden Gründen wollen wir aber unter $S_{n,1}\, d\,(u_{n+1})$ doch eine Operation verstehen, welche auf u_{n+1} so ausgeübt werden soll, als wäre u_{n+1} nicht ganz unabhängig von u_1; weil aber diese Abhängigkeit im Allgemeinen nicht eine derartige ist, dass $\frac{d\,(u_{n+1})}{d u_1}$ gebildet werden könnte, so ist die ursprüngliche für $S_{n,1} d(F(u_1))$ gegebene Definition hier nicht anwendbar, so dass wir über $S_{n,1} d(u_{n+1})$ nach Belieben noch verfügen können. Aus praktischen Gründen soll nun einem solchen Ausdruck die Bedeutung

$$S_{n,1}\, d(u_{p\,n+1}) = (p+1) \cdot u_{(p+1)\,n+1}$$

beigelegt werden. (Um eine solche Willkür zu rechtfertigen, dürfte es wohl genügen, an das Uebereinkommen zu erinnern,

$$0! = 1, \text{ oder } \binom{n}{0} = 1, \text{ u. dgl.}$$

bedeuten zu lassen, wenn es sich darum handelt, Uebersicht und Uebereinstimmung in Formeln zu erhalten.)

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Operationen liegt also darin, dass in der *ersteren* der Factor u_{n+1}, so lange es sich um die fortgesetzten Operationen *lediglich* in Bezug auf u_1 handelt, als von u_1 *völlig* unabhängig betrachtet wird; und wenn es sich um die Ausführung der Operation nicht bloss nach u_1, sondern auch nach u_{n+1}, u_{2n+1}, etc. handelt (wo nämlich die Function, auf welche die Operation ausgeübt werden soll, von vornherein schon diese Grössen besitzt, die für sie als Variable betrachtet werden sollen) nach der Formel

$$s_n^2 d\left(F(u_1, u_{n+1}, u_{2n+1}, \cdots)\right) = s_n^2 \partial_{u_1} F + s_n^2 \partial_{u_{n+1}} F + s_n^2 \partial_{u_{2n+1}} F + \cdots$$
$$+ 2 [s_n \partial_{u_1} \cdot s_n \partial_{u_{n+1}} F + s_n \partial_{u_1} \cdot s_n \partial_{u_{2n+1}} F + s_n \partial_{u_{n+1}} \cdot s_n \partial_{u_{2n+1}} F + \cdots]$$

und zwar am besten nach der oben (am Schlusse von (α) in diesem Paragraphen) angegebenen Methode (für die Grössen u_{n+1}, u_{2n+1}, etc. vorläufig u_{1_1}, u_{1_2}, etc. einzusetzen) zu verfahren sein wird.

Bei der *zweiten* Auffassung soll dagegen die Operation $S_n^x d$ zwar *immer* lediglich in Bezug auf u_1 ausgeführt werden, jedoch sollen die durch die Operation selbst hinzutretenden Factoren u_{n+1}, etc. als von u_1 nicht ganz unabhängig betrachtet werden, und zwar soll also allgemein (aus Gründen, die sich später zeigen werden) die Formel gelten

$$\text{(C)} \qquad u_{pn+1} = \frac{S_n^p d\,(u_1)}{p!}.$$

Für die Berechtigung einer solchen neuen Definition und Bezeichnung ist es nur nöthig zu zeigen, dass dieselbe nicht im Widerspruch mit der Obigen

$$S_n d\, F(u_1) = F'(u_1) \cdot u_{n+1}$$

und insbesondere mit

$$S_n d\,(u_1^m) = m \cdot u_1^{m-1} \cdot u_{n+1}$$

steht. In der That ist aber nicht bloss kein Widerspruch vorhanden, sondern es lässt sich sogar diese letzte Formel für den Fall, wo m eine ganze positive Zahl ist, direct aus (C), welche als Definition gelten sollte, herleiten, wenn man nur für die so definirte Operation das Multiplicationsgesetz

$$S_n d(u_{\mathfrak{l}_1} \cdot u_{\mathfrak{l}_2}) = u_{\mathfrak{l}_2} \cdot S_n d(u_{\mathfrak{l}_1}) + u_{\mathfrak{l}_1} S_n d(u_{\mathfrak{l}_2})$$

gelten lässt. Es folgt nämlich dann für $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ und $\varkappa = 1$ ganz direct

$$S_n d(u_{\mathfrak{l}}^2) = 2 u_{\mathfrak{l}} \cdot u_{n+\mathfrak{l}},$$

und, wenn man so fortfährt, für jedes positive ganze m

$$S_n d(u_{\mathfrak{l}}^m) = m u_{\mathfrak{l}}^{m-1} \cdot u_{n+\mathfrak{l}}.$$

Demgemäss haben wir einerseits

$$(\alpha) \begin{cases} S_n d(u_{\mathfrak{l}}) = u_{n+\mathfrak{l}}, \\ S_n d(u_{n+\mathfrak{l}}) = S_n^2 d(u_{\mathfrak{l}}) = 2 u_{2n+\mathfrak{l}}, \\ S_n d(u_{2n+\mathfrak{l}}) = \dfrac{S_n^2 d(u_{n+\mathfrak{l}})}{2} = \dfrac{S_n^3 d(u_{\mathfrak{l}})}{1 \cdot 2} = 3 \cdot u_{3n+\mathfrak{l}}, \\ \vdots \\ S_n d(u_{pn+\mathfrak{l}}) = \dfrac{S_n^2 d(u_{(p-1)n+\mathfrak{l}})}{p} = \dfrac{S_n^3 d(u_{(p-2)n+\mathfrak{l}})}{p(p-1)} = \cdots \\ \qquad = \dfrac{S_n^{p+1} d(u_{\mathfrak{l}})}{p!} = (p+1) u_{(p+1)n+\mathfrak{l}}; \end{cases}$$

und andrerseits auch

$$(\beta) \begin{cases} S_n d(u_{pn+\mathfrak{l}}) = (p+1) u_{(p+1)n+\mathfrak{l}}, \\ S_n^2 d(u_{pn+\mathfrak{l}}) = (p+1)(p+2) u_{(p+2)n+\mathfrak{l}}, \\ S_n^3 d(u_{pn+\mathfrak{l}}) = (p+1)(p+2)(p+3) u_{(p+3)n+\mathfrak{l}}, \\ \vdots \\ S_n^{\varkappa} d(u_{pn+\mathfrak{l}}) = (p+1)(p+2) \cdots (p+\varkappa) u_{(p+\varkappa)n+\mathfrak{l}}; \end{cases}$$

also auch umgekehrt:

$$u_{(p+\varkappa)n+\mathfrak{l}} = \frac{S_n^{\varkappa} d(u_{pn+\mathfrak{l}})}{(p+\varkappa)(p+\varkappa-1)\cdots(p+1)},$$

oder endlich, wenn man in dieser allgemeinen Formel $(p-\varkappa)$ anstatt p setzt, auch

$$\text{(D)} \qquad u_{pn+\mathfrak{l}} = \frac{S_n^{\varkappa} d(u_{(p-\varkappa)n+\mathfrak{l}})}{p(p-1)\cdots(p-\varkappa+1)}.$$

Nach der so vervollständigten Definition wird sonach:

$$S_n^2 d(u_{\mathfrak{l}}^m) = m(m-1) u_{\mathfrak{l}}^{m-2} u_{n+\mathfrak{l}}^2 + 2m u_{\mathfrak{l}}^{m-1} \cdot u_{2n+\mathfrak{l}},$$

oder auch so geschrieben:

$$\frac{S_n^2 d(u_1^m)}{2!} = \binom{m}{2} u_1^{m-2} \cdot u_{n+1}^2 + \binom{m}{1} u_1^{m-1} \cdot u_{2n+1},$$

während nach dem Obigen

$$\frac{s_n^2 d(u_1^m)}{2!} = \binom{m}{2} u_1^{m-2} \cdot u_{n+1}^2$$

ist. Ebenso hat man ferner

$$\frac{S_n^3 d(u_1^m)}{3!} = \binom{m}{3} u_1^{m-3} \cdot u_{n+1}^3 + 2\binom{m}{2} u_1^{m-2} \cdot u_{n+1} \cdot u_{2n+1} + \binom{m}{1} u_1^{m-1} \cdot u_{3n+1},$$

während aber

$$\frac{s_n^3 d(u_1^m)}{3!} = \binom{m}{3} u_1^{m-3} \cdot u_{n+1}^3$$

ist; und so auch

$$\frac{S_n^4 d(u_1^m)}{4!} = \binom{m}{4} u_1^{m-4} \cdot u_{n+1}^4 + 3\binom{m}{3} u_1^{m-3} \cdot u_{n+1}^2 \cdot u_{2n+1} + \left\{\binom{m}{2} u_1^{m-2} \cdot u_{2n+1}^2 + 2\binom{m}{2} u_1^{m-2} \cdot u_{n+1} \cdot u_{3n+1}\right\} + \binom{m}{1} u_1^{m-1} \cdot u_{4n+1},$$

wogegen

$$\frac{s_n^4 d(u_1^m)}{4!} = \binom{m}{4} u_1^{m-4} \cdot u_{n+1}^4$$

ist, etc.

b) Es ist also immer $s_n^\varkappa\, d\, F(u_1)$ das erste Glied bei der Bildung von $S_n^\varkappa\, d\, F(u_1)$. Es ist hierin eine Analogie (gewissermassen) zu der Erscheinung, wo dy als erstes Glied in der Bildung von Δy auftritt. Indess ist diese Analogie keine vollständige. (S. Nachträge.) Während nämlich die endliche Differenz $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung einer ganzen Function m^{ten} Grades, wenn $\varkappa > m$ ist, so wie die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung in solchem Falle verschwindet, geschieht dieses hier nur bei der $s_n d$-Operation, nicht aber bei der $S_n d$. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur $m = 3$ und $\varkappa = 4$ zu setzen und man ersieht dann aus der letzten Formel, dass wirklich

$$s_n^4 d(u_1^3) = 0$$

ist, während in diesem Falle in $S_n^4 d(u_{\mathfrak{l}}^3)$ wohl das erste Glied verschwindet, die übrigen Glieder jedoch bestehen bleiben.

Ebenso hat man allgemein für eine beliebige Function $F(u_{\mathfrak{l}})$

$$\frac{S_n\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{1!} = \frac{F^{(1)}(u_{\mathfrak{l}})}{1!}\,u_{n+\mathfrak{l}};$$

$$\frac{S_n^2\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{2!} = \frac{F^{(2)}(u_{\mathfrak{l}})}{2!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^2 + \frac{F^{(1)}(u_{\mathfrak{l}})}{1!}\,u_{2n+\mathfrak{l}};$$

$$\frac{S_n^3\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{3!} = \frac{F^{(3)}(u_{\mathfrak{l}})}{3!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^3 + 2\,\frac{F^{(2)}(u_{\mathfrak{l}})}{2!}\,u_{n+\mathfrak{l}}\,u_{2n+\mathfrak{l}} + F^{(1)}(u_{\mathfrak{l}})\,u_{3n+\mathfrak{l}};$$

$$\frac{S_n^4\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{4!} = \frac{F^{(4)}(u_{\mathfrak{l}})}{4!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^4 + 3\,\frac{F^{(3)}(u_{\mathfrak{l}})}{3!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^2\,u_{2n+\mathfrak{l}} + \left\{ + \frac{F^{(2)}(u_{\mathfrak{l}})}{2!}\,u_{2n+\mathfrak{l}}^2 + \frac{2F^{(2)}(u_{\mathfrak{l}})}{2!}\,u_{n+\mathfrak{l}}\,u_{3n+\mathfrak{l}} \right. + \frac{F^{(1)}(u_{\mathfrak{l}})}{1!}\,u_{4n+\mathfrak{l}};$$

etc.

$$\frac{s_n\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{1!} = \frac{F^{(1)}(u_{\mathfrak{l}})}{1!}\,u_{n+\mathfrak{l}};$$

$$\frac{s_n^2\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{2!} = \frac{F^{(2)}(u_{\mathfrak{l}})}{2!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^2;$$

$$\frac{s_n^3\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{3!} = \frac{F^{(3)}(u_{\mathfrak{l}})}{3!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^3;$$

$$\frac{s_n^4\,dF(u_{\mathfrak{l}})}{4!} = \frac{F^{(4)}(u_{\mathfrak{l}})}{4!}\,u_{n+\mathfrak{l}}^4;$$

etc. *)

*) Uebrigens sind diese Operationen nach einer gewissen Richtung als specielle Fälle in einer andern allgemeinern enthalten, welche ausser den Unsrigen noch andere, in der Mathematik bereits bekannte Operationen zugleich in sich fasst. Bezeichnet man nämlich das Product aus folgenden drei Factoren, nämlich aus der Ableitung von $F(u_{\mathfrak{l}_1})$ nach $u_{\mathfrak{l}_1}$, aus *dem* ferner, was man aus $u_{\mathfrak{l}_1}$ bekommt, wenn man auf den Index $\mathfrak{l}_1$ die (um hier die Sache nicht zu sehr zu compliciren, sagen wir die *einfache lineare*) Substitution $\begin{bmatrix} z+n \\ z \end{bmatrix}$ ausübt und endlich

Eine weitere Relation zwischen den beiden Operationen stellt sich durch folgende Betrachtung heraus.

Offenbar ist $S^{\varkappa}_{n,\mathfrak{l}}dF(u_{\mathfrak{l}})$ eine Function von $(\varkappa + 1)$ Variabeln $u_{\mathfrak{l}}, u_{n+\mathfrak{l}}, u_{2n+\mathfrak{l}}, \cdots, u_{\varkappa n+\mathfrak{l}}$; bezeichnet man daher kurz

$$\frac{S^{\varkappa}_{n,\mathfrak{l}}\, dF(u_{\mathfrak{l}})}{\varkappa !} = \varphi(K)$$

---

aus einem willkürlichen constanten Factor $v_{\mathfrak{l}_1}$ mit $S_{n,\mathfrak{l};v}\, dF(u_{\mathfrak{l}_1})$, d. h.

$$S_{n,\mathfrak{l};v}\, dF(u_{\mathfrak{l}_1}) = v_{\mathfrak{l}_1} F'(u_{\mathfrak{l}_1}) u_{n+\mathfrak{l}_1},$$

so sind darin unter Anderem folgende specielle Fälle enthalten.

1) Setzt man $\mathfrak{l}_1 = qn + \mathfrak{l}$, so dass $u_{n+\mathfrak{l}_1} = u_{(q+1)n+\mathfrak{l}}$ und setzt zugleich $v_{\mathfrak{l}_1} = q + 1$, so bekommt man die Formel unserer Operation

$$S_{n,\mathfrak{l}}\, dF(u_{qn+\mathfrak{l}}) = (q+1)\, F'(u_{qn+\mathfrak{l}}) \cdot u_{(q+1)\, n+\mathfrak{l}},$$

worin der Index v für diesen speciellen Fall weggelassen wurde.

2) Setzt man für alle $\mathfrak{l}_1 = qn + \mathfrak{l}$ den Factor $v_{\mathfrak{l}_1} = 0$ und nur für $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ allein $v_{\mathfrak{l}} = 1$, so bekommt man unsere $s_n\, d$-Operation. (Natürlich ist es in beiden Fällen zulässig nach denselben Principien eine Function mehrerer Variablen durch partielles Operiren zu behandeln; unterscheiden sich die Indices der Variabeln nur um Vielfache von n, so setze man vorerst an ihre Stelle die Indices $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots$, behandle jeden partiell als $\mathfrak{l}$ und führe nach ausgeführter Operation die Werthe wieder ein. Diese Bemerkung ist nothwendig, aber auch hinreichend, um scheinbare Widersprüche zu vermeiden.)

3) Setzt man $n = -1$ und $v = \mathfrak{l}_1$ und lässt in der Bezeichnung in diesem Falle v weg, so bekommt man:

$$S_{-1,\mathfrak{l}}\, dF(u_{\mathfrak{l}_1}) = \mathfrak{l}_1 F'(u_{\mathfrak{l}_1}) \cdot u_{\mathfrak{l}_1 - 1} = F'(u_{\mathfrak{l}_1}) \cdot \mathfrak{l}_1 \cdot u_{\mathfrak{l}_1 - 1}.$$

Man bemerkt leicht, dass der Factor

$$\mathfrak{l}_1 \cdot u_{\mathfrak{l}_1 - 1}$$

vollkommen die Gestalt einer symbolischen Ableitung von $u_{\mathfrak{l}_1}$ hat, wenn $u_{\mathfrak{l}_1}$ als eine symbolische $\mathfrak{l}_1$te Potenz aufgefasst wird.

4) Ist in der That speciell

$$u_{\mathfrak{l}_1} = u^{\mathfrak{l}_1},$$

so bekommt man die wirkliche Ableitung von $F(u_{\mathfrak{l}_1})$ nach u.

5) Ist φ eine Function mehrerer Variabeln $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots$ und bildet man die totale Operation als Summe der nach den Variabeln $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots$ partiell nach den in (3) specialisirten Principien ausgeführten Operationen, so erhält man die bekannte Operation

$$\delta\varphi,$$

welche in der Theorie der binären Formen eine besondere Rolle spielt (Faà de Bruno) etc.

als Function jener $\varkappa + 1$ Variabeln und führt darauf die Operation $s_n^q\, d\, \varphi(K)$ von dem Gesichtspuncte aus, dass

$$s_n\, d\, \varphi(K) = s_n \partial_{u_{\mathrm{I}}} \varphi + s_n \partial_{u_{n+\mathrm{I}}} \varphi + \cdots + s_n \partial_{u_{\varkappa n+\mathrm{I}}} \varphi,$$

so erhält man die Relationen:

$$\varphi(0) \quad = F(u_{\mathrm{I}}),$$

$$\varphi(I) \quad = \frac{S_{n,\mathrm{I}}\, d\, F(u_{\mathrm{I}})}{1!} = \frac{s_n\, d\, \varphi(0)}{1!},$$

$$\varphi(II) \quad = \frac{S_{n,\mathrm{I}}^2\, d\, F(u_{\mathrm{I}})}{2!} = \frac{s_n\, d\, \varphi(I)}{1!} - \frac{s_n^2\, d\, \varphi(0)}{2!},$$

$$\varphi(III) = \frac{S_{n,\mathrm{I}}^3\, d\, F(u_{\mathrm{I}})}{3!} = \frac{s_n\, d\, \varphi(II)}{1!} - \frac{s_n^2\, d\, \varphi(I)}{2!} + \frac{s_n^3\, d\, \varphi(0)}{3!},$$

$$\varphi(IV) = \frac{S_{n,\mathrm{I}}^4\, d\, \varphi(u_{\mathrm{I}})}{4!} = \frac{s_n d\, \varphi(III)}{1!} - \frac{s_n^2\, d\, \varphi(II)}{2!} + \frac{s_n^3\, d\, \varphi(I)}{3!} - \frac{s_n^4\, d\, \varphi(0)}{4!},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

und so allgemein:

$$(K) \quad \varphi(K) = \frac{S_n^{\varkappa}\, d\, F(u_{\mathrm{I}})}{\varkappa!} = \sum_{1}^{L}{}_T\, (-1)^{T-1} \frac{s_n^T\, d\, \varphi(K-T)}{T!},$$

wobei L niemals grösser als K, wohl aber kleiner sein kann, je nach Beschaffenheit der Function $F(u_{\mathrm{I}})$; wenn nämlich die Function eine derartige ist, dass die Ableitung von der Ordnung $\mu < L$ verschwindet, dann ist natürlich $s_n^{\mu}\, d\varphi(0) = 0$, wie das bei einer ganzen rationalen Function $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades der Fall ist.

Der *Beweis* ist durch den Schluss von $\varkappa$ auf $\varkappa + 1$ leicht zu erbringen. Für den Fall, wo $F(u_{\mathrm{I}}) = u_{\mathrm{I}}^m$, ebenso auch für eine homogene Function m^{ten} Grades, die einzigen Fälle nämlich, von denen wir demnächst besonderen Gebrauch zu machen haben, wird weiter unten noch ein besonderer Beweis sich von selbst ergeben.

c) Um uns nicht von unserem gegenwärtigen Zwecke zu viel zu entfernen, unterlassen wir es hier, auf einige Anwendungen dieser Operation, wie auch analoger Operationen $S_n \Delta F(u_1)$, $s_n \Delta F(u_1)$ und $S_n \delta$, $s_n \delta$ (welche aus Verbindungen von Substitutionen einerseits und Differenzen, oder Variationen andererseits bestehen) auf dem Gebiete der fonctions génératrices u. dergl. näher einzugehen. An einer anderen Stelle wollen wir zeigen, dass diese Operationen sehr nützlich werden, wenn man eine so zu nennende *Substitutionalrechnung*, wonach man mit Substitutionen ebenso direct, wie mit andern mathematischen Operationen, analytische Rechnungen auszuführen im Stande wäre, begründen will. Hier jedoch wollen wir uns darauf beschränken, aus den obigen Formeln einige Consequenzen für die speciellen Fälle zu ziehen, wo

$$F(u_1) = u_1^m,$$

oder auch eine homogene Function m^{ten} Grades

$$F(u_{\tau n+1})_{(\tau=0,1,2,\ldots)} = (u_1,\, u_{n+1},\, \cdots)^m$$

der Variabeln u_1, u_{n+1}, u_{2n+1}, $\cdots$ ist. — Wir bemerken zu allererst folgende für uns wichtige Eigenschaften:

1) Ist die gegebene Function eine einfache Potenz

$$F(u_1) = u_1^m,$$

oder auch eine homogene Function m^{ten} Grades der Variabeln u_1, u_{n+1}, u_{2n+1}, $\cdots$, nämlich:

$$(u_1,\, u_{n+1},\, u_{2n+1},\, \cdots)^m,$$

wobei m eine ganze positive oder negative Zahl ist, so lassen die oben definirten Operationen die Dimension m (die Summe der Exponenten aller Factoren eines jeden Gliedes) unverändert, was bei der Operation $S_n d$ auch bestehen bleibt bei *allen*, bis ins Unendliche oft wiederholten Ausübungen derselben; während bei der Operation $s_n^x d$ die constante m^{te} Dimension nur für $x \leqq m$ gelten kann, da für $x > m$ sowohl

$$s_n^{m+p} d(u_1^m) = 0,$$

als auch

$$s_n^{m+p} d(u_1,\, u_{n+1},\, \cdots)^m = 0$$

ist.

Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet sofort ein, wenn man nur bemerkt, dass jedes Glied durch die jedesmalige Differentiation um eine Einheit in der Dimension herabsinkt und dafür aber durch die Multiplication mit einem Factor u_{pn+1} sofort wieder um eine Einheit steigt.

2) Die lineare Substitutional-Differentiation n^{ter} Classe (welche von den beiden obigen Operationen sie auch sein mag) *) vermehrt immer das Gewicht eines jeden Gliedes, auf welches sie *einmal* ausgeübt wird, um n, und wenn sie $\varkappa$-mal ausgeübt wird, um $\varkappa \cdot n$.

Auch die Richtigkeit dieser Behauptung ist sofort zu ersehen; denn bei diesen Operationen wird immer nur ein Factor in der Form u^q_{pn+1} in jedem Gliede um eine Einheit im Exponenten erniedrigt und dafür tritt ein anderer Factor $u_{(p+1)n+1}$ mit einem gewissen Zahlencoefficienten, der auf das Gewicht, oder auf die Dimension keinen Einfluss hat, hinzu. Lässt man daher die bei der Operation unverändert gebliebenen Factoren unberücksichtigt, so hat sich das Gewicht dahin geändert, dass anstatt $q(pn+1)$ die Zahl

$$(q-1)(pn+1)+(p+1)\cdot n+1=q(pn+1)+n$$

getreten ist; wie behauptet war.

Selbstverständlich muss auch hier berücksichtigt werden, dass für die eine Operation

$$s^{\varkappa}_{n} d(u_1, u_{n+1}, u_{2n+1}, \cdots)^m$$

für $\varkappa > m$ immer

---

*) Man wird gemerkt haben, dass, um Gesetze auszudrücken, welche für *verschiedene* unserer Operationen, z. B. Sd und sd, oder Sd und $S\partial$ etc. *zugleich* gelten sollen, die *eine* Benennung „*Sd-Operation*“ durch die unwillkürliche Wahl *eines* der Zeichen Sd, sd, oder $s\partial$ etc., indem sie in solchen Fällen eine ungewünschte Particularisirung herbeirufen würde, nicht ganz bequem ist; daher habe ich mir erlaubt neben jener Benennung noch eine andere: „*Substitutional-Differentiation*“ zu gebrauchen. Letztere hat unter Anderem noch den Vortheil, dass man bei derselben leicht das Zeitwort „*substitutionell-differentiiren*“ bilden kann; indess giebt es Fälle, wo die erstere Benennung vorzuziehen ist und deshalb habe ich sie beide beibehalten.

$$s_n^{m+p} d(u_1, u_{n+1}, \cdots)^m = 0$$

ist, und es kann dabei auch die behauptete Vermehrung des Gewichtes um $(\varkappa \cdot n)$ nur für

$$\varkappa \leqq m$$

stattfinden.

§ 5.

Anwendung der Substitutional-Differentiation auf die Darstellung ganzer Functionen von Cofunctionen in Form von cofunctionalen Potenzreihen.

Allgemeiner Lehrsatz A. Jede m^{te} *Potenz einer* i^{ten} *Partialfunction* n^{ter} *Classe*

$$p_i = f_{n,i}(x) = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + a_{2n+i} x^{2n+i} + \cdots + a_{qn+i} x^{qn+i} + \cdots,$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

lässt sich immer in dem Convergenzgebiete der Hauptfunction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \cdots$$

als eine Potenzreihe von der Form

$$F_{n,mi}(x) = \sum_0^\infty{}^\mu C_\mu x^{\mu n + mi},$$

also wiederum als eine $(m\,i)^{te}$ *Partialfunction derselben* n^{ten} *Classe, deren Coefficienten* C *durch jede der beiden Formeln, nämlich sowohl durch*

$$\text{(I)} \qquad C_\mu = \sum_0^\lambda{}^t (-1)^{t-1} \frac{s_n^t d(C_{\mu-t})}{t!};$$

$$(C_{\mu-t} = \varphi(a_i, a_{n+i}, a_{2n+i}, \cdots)),$$

wobei (wie angedeutet) $C_{\mu-t}$ *als eine Function aufzufassen ist von allen* a_{qn+i}, *welche darin vorkommen, bevor die Operation beginnt und* $s_n^t d$ *das Aggregat der Resultate aller nach jenen Variabeln ausgeführten partiellen* $s\partial$*-Operationen von der Ordnungs-Dimension* (t) *bedeutet, so dass*

$$\lambda \leqq \mu \text{ und } \lambda \leqq m,$$

also nicht grösser als die kleinere unter den beiden Grössen μ *und* m *sein kann:*

als auch durch

$$\text{(II)} \qquad C_\mu = \frac{S_n^t d(C_{\mu-t})}{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-t+1)};$$

$$(C_{\mu-t} = F(a_i); \quad t = 1, 2, \cdots, \mu),$$

wobei (wie angedeutet) alle in $C_{\mu-t}$ *schon vorhandenenen und die durch die successive Wiederholung der Operation noch hinzutretenden Factoren* a_{pn+i} *diesmal als von* a_i *in oben definirter Weise abhängig (Formeln* (α), (β) *und* (C) *in* § 4) *aufgefasst werden und wobei* t *(in diesem zweiten Falle) eine der ganzen Zahlen* $1, 2, \cdots, \mu$ *bedeutet.*

Durch Formel (I) *kann man also jeden Coefficienten aus* λ *vorhergehenden und durch Formel* (II) *jeden Coefficienten aus irgend einem vorhergehenden vollkommen construiren.*

(In der Formel (I) wird man die Operation $s_n^t d(\varphi(a_{\tau n+i}))$; ($\tau = 0, 1, 2, \cdots$), wie schon wiederholt bemerkt worden, am besten so ausführen, dass man zuerst $a_{\tau n+i} = a_{i_\tau}$ setzen wird, $C_{\mu-t}$ oder φ als Function von allen den Variabeln a_{i_τ}; ($\tau = 0, 1, 2, \cdots$) betrachten, partiell nach allen diesen Variabeln die $s\partial$-Operation ausführen und nach ausgeführter $s_n^t d(\varphi)$ die Werthe $a_{i_\tau} = a_{\tau n+i}$ wieder einsetzen.)

Um diesen allgemeinen Satz zu beweisen, will ich zuerst eine Reihe von specielleren Sätzen beweisen, deren Richtigkeit dann auch die Richtigkeit des obigen allgemeinen Satzes bewahrheiten wird. Zugleich werden wir aber bei diesem Verfahren Manches bemerken, was wir später gebrauchen können.

a) Wir wollen zuerst beweisen, dass dieses Gesetz schon für die Coefficienten der gegebenen Partialfunction $p_i = f_{n,i}(x)$ selbst, ja schon sogar für die ursprüngliche Hauptfunction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_q x^q + \cdots,$$

aus welcher wir uns p_i als Partialfunction vorstellen, bereits stattfand.

Dass das Gesetz (II) in $f_{n,i}(x)$ stattfindet, ist sofort klar. Denn greifen wir zunächst den allgemeinen Coefficienten von x^{qn+i}, also a_{qn+i} heraus, so ist unmittelbar zu sehen, dass nach der obigen Definition

$$S_{n,i} d(a_{qn+i}) = (q+1)\, a_{(q+1)n+i}$$

ist, also

$$\frac{S_{n,i}\, d(a_{qn+i})}{q+1} = a_{(q+1)n+i},$$

und ebenso

$$\frac{S_{n,i}\, d(a_{(q+1)n+i})}{q+2} = \frac{S_{n,i}^2\, d(a_{qn+i})}{(q+2)(q+1)} = a_{(q+2)n+i},$$

etc., was mit dem ausgesprochenen Satze genau übereinstimmt. — Uebrigens folgt die Richtigkeit dieses Satzes für den Fall, dass die Coefficienten der Reihe von der ersten Dimension sind, unmittelbar aus den obigen Formeln (α), (β). Ebenso leicht ist für diesen Fall auch die Richtigkeit der Formel (I) einzusehen. Denn offenbar ist der Definition gemäss

$$\frac{s_n\, d(a_{qn+i})}{1!} = a_{(q+1)n+i},$$

und da für diesen Fall, wo a_{qn+i} von der ersten Dimension ist, für $t > 1$

$$s_n^t\, d(a_{qn+i}) = 0$$

ist, so findet genau die obige Formel (I) statt; nur besteht die in derselben angedeutete Summe nach t diesmal aus einem einzigen Gliede, weil λ nicht grösser als m, als der Exponent der gegebenen Potenz, welcher jetzt der *Einheit* gleich ist, sein kann. — Findet aber dieses Gesetz allgemein zwischen den Coefficienten einer beliebigen i^{ten} Partialfunction n^{ter} Classe statt, so sieht man sofort, dass dasselbe Gesetz schon bei der ursprünglichen Hauptfunction stattfinden muss, weil dieses nur ein specieller Fall ($n = 1$, $i = 0$) des vorigen ist. — Die Formeln (I) und (II) enthalten somit eine gewisse Darstellungsweise für Potenzreihen, welche an Stelle von

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^q\, a_q x^q,$$

oder allgemeiner von

$$f_{n,i}(x) = \sum_0^\infty {}^q\, a_{qn+i} x^{qn+i}$$

treten kann.

Bevor wir aber auf die Bedeutung dieser Darstellungsweise weiter eingehen, wollen wir zuerst die Gültigkeit derselben noch erweitern.

b) Auf Grund der Eigenschaften

(1), (2), (3), (4) in § 3

kann man behaupten, dass *erstens*, wenn das Gesetz für eine gewisse Potenzreihe stattfindet, dasselbe auch bestehen bleibt, wenn die Reihe mit einem constanten Factor multiplicirt wird; und *zweitens*, wenn das Gesetz beziehungsweise für die Coefficienten mehrerer Potenzreihen (welche in einem gemeinsamen Gebiete convergent sind) stattfindet, dasselbe auch für die Coefficienten derjenigen Reihe besteht, welche die algebraische Summe jener Reihen repräsentirt. Gelten also die Formeln (I) und (II) für die Coefficienten von $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, so gelten sie auch für die Coefficienten der Reihe $F(x)$, wenn

$$F(x) = A_1 f_1(x) \pm A_2 f_2(x) \pm \cdots.$$

c) Wir wollen jetzt beweisen, dass das Gesetz auch für die Coefficienten von $F(x)$ stattfindet, wenn $F(x)$ das Product zweier beliebiger Partialfunctionen derselben Classe zweier Hauptfunctionen

$$f_1(x) = \sum_0^\infty {}^q\, a_{1,q} x^q, \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty {}^q\, a_{2,q} x^q,$$

welche in einem gemeinsamen Gebiete convergiren, repräsentirt, also für

$$F(x) = \underset{n,i_1}{f_1}(x) \cdot \underset{n,i_2}{f_2}(x).$$

Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in demselben Gebiete convergent, so sind es auch die circumplexen Funtionen derselben, nämlich $f_1(r_n^h x)$ und $f_2(r_n^h x)$, weil die Substitution von $r_n^h x$ anstatt x den Werth von x nur um einen gewissen Winkel dreht, den Modul aber unverändert lässt, wobei der Convergenzkreis also derselbe bleibt. Ebenso müssen es aber auch die Partialfunctionen sein, die, wie wir wissen, endliche lineare Summen der circumplexen sind. Folglich darf man die Multiplication von

$$\underset{n,i_1}{f_1}(x) = a_{1,i_1} x^{i_1} + a_{1,n+i_1} x^{n+i_1} + a_{1,2n+i_1} x^{2n+i_1} + \cdots,$$

$$\underset{n,i_2}{f_2}(x) = a_{2,i_2} x^{i_2} + a_{2,n+i_2} x^{n+i_2} + a_{2,2n+i_2} x^{2n+i_2} + \cdots$$

nach dem bekannten Abel'schen Gesetze

$$F(x) = a_{1,i_1} a_{2,i_2} x^{i_1+i_2} + [a_{1,i_1} a_{2,n+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,i_2}] x^{n+i_1+i_2}$$
$$+ [a_{1,i_1} a_{2,2n+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,n+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,i_2}] x^{2n+i_1+i_2} + \cdots$$

ausführen. Es ist nun sofort klar, dass nach der Definition

$$S_n d(a_{1,i_1} a_{2,i_2}) = a_{1,i_1} \cdot a_{2,n+i_2} + a_{1,n+i_1} \cdot a_{2,i_2},$$

und ebenso ferner

$$S_n d(a_{1,i_1} \cdot a_{2,n+i_2} + a_{1,n+i_1} \cdot a_{2,i_2})$$
$$= 2[a_{1,i_1} a_{2,2n+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,n+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,i_2}]$$

etc., was mit der Formel (II) zunächst für die ersten zwei Coefficienten vollkommen übereinstimmt. Ebenso ist aber allgemein

$$S_n d(a_{1,i_1} \cdot a_{2,qn+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,(q-1)n+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,(q-2)n+i_2} + \cdots + a_{1,qn+i_1} a_{2,i_2})$$
$$= (q+1)[a_{1,i_1} a_{2,(q+1)n+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,qn+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,(q-1)n+i_2} + \cdots + a_{1,(q+1)n+i_1} a_{2,i_2}].$$

Weil aber die Gleichung für alle Werthe von q besteht, so ist hiermit ausgesprochen, dass die Formel (II) für alle Coefficienten von $F(x)$ richtig bleibt.

Aber auch die Gültigkeit von Formel (I) ist ebenso leicht einzusehen; da nämlich hier die Coefficienten von der 2ten Dimension sind, so wird man nur zwei aufeinander folgende sd-Operationen auszuführen haben, um sich von der Richtigkeit zu überzeugen.

In der That ist:

$$s_n d(a_{1,i_1} a_{2,qn+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,(q-1)n+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,(q-2)n+i_2} + \cdots + a_{1,qn+i_1} a_{2,i_2})$$
$$= [a_{1,i_1} a_{2,(q+1)n+i_2} + a_{1,n+i_1} a_{2,qn+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,(q-1)n+i_2} + \cdots + a_{1,qn+i_1} a_{2,n+i_2} + a_{1,(q+1)n+i_1} a_{2,i_2}]$$
$$+ [a_{1,n+i_1} a_{2,qn+i_2} + a_{1,2n+i_1} a_{2,(q-1)n+i_2} + a_{1,3n+i_1} a_{2,(q-2)n+i_2} + \cdots + a_{1,(q-1)n+i_1} a_{2,2n+i_2} + a_{1,qn+i_1} a_{2,n+i_2}].$$

Dabei enthält die erste Klammer rechter Hand das Resultat der partiellen $s\partial$-Operationen aller Glieder nach a_1 und ausserdem noch zuletzt das partielle $s\partial$ des letzten Gliedes nach a_2, während die zweite Klammer daselbst das Resultat der

partiellen $s\partial$-Operationen aller Glieder (mit Ausnahme des letzten, welches schon in der ersten Klammer aufgenommen war) nach a_2 ist. Bildet man jetzt s^2d von demselben allgemeinen Gliede, nachdem in demselben $(q - 1)$ anstatt q gesetzt worden war, und bemerkt man, dass sowohl $s_{n,i}^2\partial_{a_1}(\quad)$, als auch $s_{n,i}^2\partial_{a_2}(\quad)$ verschwindet und

$$s_{n,i}^2 d(\quad) = 2s_{n,i}\partial_{a_1} \cdot s_{n,i}\partial_{a_2}(\quad),$$

so hat man:

$$\frac{s_{n,i}^2 d}{2}(a_{1,i_1}a_{2,(q-1)n+i_2} + a_{1,n+i_1}a_{2,(q-2)n+i_2} + \cdots + a_{1,(q-1)n+i_1}a_{2,i_2})$$
$$= [a_{1,n+i_1}a_{2,qn+i_2} + a_{1,2n+i_1}a_{2,(q-1)n+i_2} + \cdots + a_{1,qn+i_1}a_{2,n+i_2}].$$

Dieser Klammerinhalt ist aber genau identisch mit dem Inhalte der zweiten Klammer in der vorletzten Gleichung. Bezeichnet man daher die Coefficienten von $F(x)$ mit C_q, so ist offenbar

$$C_\mu = s_n d\ C_{\mu-1} - \frac{1}{2}\ s_n^2 d\ C_{\mu-2},$$

d. h.

$$C_\mu = \sum_1^2{}^t (-1)^{t-1}\frac{s_n^t d\ C_{\mu-t}}{t!},$$

$$\text{(hier } \lambda = 2, \text{ weil diesmal } m = 2\text{)},$$

was wir beweisen wollten.

Nun bemerken wir aber, dass $F(x)$ wiederum eine $(i_\varkappa)^{\text{te}}$ Partialfunction $(i_\varkappa = i_1 + i_2)$ derselben, n^{ten} Classe wird, welche in demselben Gebiete wie $f_1(x)$ und $f_2(x)$ convergirt. Bezeichnet man jenes Product als eine solche

$$F(x) = \underset{n,i_\varkappa}{f_\varkappa}(x),$$

so kann man dieselbe mit irgend einer i_3^{ten} Partialfunction n^{ter} Classe einer in jenem Gebiete convergirenden Hauptfunction $f_3(x)$ wie oben multipliciren, und für dieses Product

$$\underset{n,i_3}{f_3}(x) \cdot \underset{n,i_\varkappa}{f_\varkappa}(x) = \underset{n,i_1}{f_1}(x) \cdot \underset{n,i_2}{f_2}(x) \cdot \underset{n,i_3}{f_3}(x)$$

muss nach dem Obigen jenes Gesetz wiederum stattfinden.

Es ist klar, dass man ebenso weiter fortfahren kann,

weil bei dem Beweise die Werthe von i ganz beliebig waren, und es wird also ebenso richtig bleiben für

$$i_{\varkappa'} = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_{\varkappa-1}.$$

In jener Willkürlichkeit ist aber auch die Möglichkeit eingeschlossen, dass die Factoren einander gleich sind. (Würde man übrigens für diesen Fall einen besonderen Beweis verlangen, so wird dieser offenbar nur für $[f_{n,i}(x)]^2$ auszuführen nöthig sein, und dieses kann nach dem Obigen leicht geschehen.) Und so ist hiermit die Richtigkeit jenes Gesetzes auch für eine beliebige ν^{te} Potenz allgemein bewiesen.

d) Folgende Potenzirung ist zur Uebung wirklich durch sd-Operationen nach den Formeln (I) und (II) bis auf sieben Glieder ausgeführt worden, weil wir später von diesem Resultat Gebrauch machen werden; man kann sie leicht verificiren.

$$(\Omega) \qquad p_i^m = [f_{n,i}(x)]^m = a_i^m x^{mi} + \binom{m}{1} a_i^{m-1} a_{n+i} x^{n+mi} +$$

$$\left.\begin{array}{l} + \binom{m}{2} a_i^{m-2} a_{n+i}^2 \\ + \binom{m}{1} a_i^{m-1} a_{2n+i} \end{array}\right| x^{2n+mi} + \left.\begin{array}{l} \binom{m}{3} a_i^{m-3} a_{n+i}^3 \\ +2\binom{m}{2} a_i^{m-2} a_{n+i} a_{2n+i} \\ + \binom{m}{1} a_i^{m-1} a_{3n+i} \end{array}\right| x^{3n+mi} +$$

$$\left.\begin{array}{l} + \binom{m}{4} a_i^{m-4} a_{n+i}^4 \\ +3\binom{m}{3} a_i^{m-3} a_{n+i}^2 a_{2n+i} \\ \left\{\begin{array}{l} +1\binom{m}{2} a_i^{m-2} a_{2n+i}^2 \\ +2\binom{m}{2} a_i^{m-2} a_{n+i} a_{3n+i} \end{array}\right. \\ + \binom{m}{1} a_i^{m-1} a_{4n+i} \end{array}\right| x^{4n+mi} + \left.\begin{array}{l} \binom{m}{5} a_i^{m-5} a_{n+i}^5 \\ +4\binom{m}{4} a_i^{m-4} a_{n+i}^3 a_{2n+i} \\ \left\{\begin{array}{l} +3\binom{m}{3} a_i^{m-3} a_{n+i}^2 a_{3n+i} \\ +3\binom{m}{3} a_i^{m-3} a_{n+i} a_{2n+i}^2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} +2\binom{m}{2} a_i^{m-2} a_{2n+i} a_{3n+i} \\ +2\binom{m}{2} a_i^{m-2} a_{n+i} a_{4n+i} \end{array}\right. \\ + \binom{m}{1} a_i^{m-1} a_{5n+i} \end{array}\right| x^{5n+mi} +$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\binom{m}{6}a_i^{m-6}a_{n+i}^6\\
&+5\binom{m}{5}a_i^{m-5}a_{n+i}^4a_{2n+i}\\
&\left\{\begin{aligned}&+6\binom{m}{4}a_i^{m-4}a_{n+i}^2a_{2n+i}^2\\&+4\binom{m}{4}a_i^{m-4}a_{n+i}^3a_{3n+i}\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}&+6\binom{m}{3}a_i^{m-3}a_{n+i}a_{2n+i}a_{3n+i}\\&+3\binom{m}{3}a_i^{m-3}a_{n+i}^2a_{4n+i}\\&+1\binom{m}{3}a_i^{m-3}a_{2n+i}^3\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}&+1\binom{m}{2}a_i^{m-2}a_{3n+i}^2\\&+2\binom{m}{2}a_i^{m-2}a_{2n+i}a_{4n+i}\\&+2\binom{m}{2}a_i^{m-2}a_{n+i}a_{5n+i}\end{aligned}\right.\\
&+\binom{m}{1}a_i^{m-1}a_{6n+i}
\end{aligned}\right|\, x^{6n+mi}+\ldots
$$

(Die geschlungenen Klammern fassen diejenigen Glieder zusammen, deren Zahlencoefficienten sich zu den Binomialcoefficienten ergänzen. Bei einer anderen Gelegenheit werden wir aus dieser Form Schlüsse ziehen, welche für die Convergenzbedingungen unserer Operationsreihen wichtig sind.)

In gewissen Fällen wird die Formel für den Quotienten $\left[\frac{f_{n,i}(x)}{a_i x^i}\right]$ zur Anwendung bequemer sein, nämlich:

$$
(\Omega')\quad \left[\frac{f_{n,i}(x)}{a_i x^i}\right]^m = 1+\binom{m}{1}\frac{a_{n+i}}{a_i}x^n + \left.\begin{aligned}&\binom{m}{2}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^2\\&+\binom{m}{1}\frac{a_{2n+i}}{a_i}\end{aligned}\right|\, x^{2n}+
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\binom{m}{3}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^3 \\
+2\binom{m}{2}\frac{a_{n+i}a_{2n+i}}{a_i^2} \\
+\binom{m}{1}\frac{a_{3n+i}}{a_i}
\end{array}\right| x^{3n}
+\left.\begin{array}{l}
\binom{m}{4}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^4 \\
+3\binom{m}{3}\frac{a_{n+i}^2 a_{2n+i}}{a_i^3} \\
\left\{\begin{array}{l} +1\binom{m}{2}\left(\frac{a_{2n+i}}{a_i}\right)^2 \\ +2\binom{m}{2}\frac{a_{n+i}a_{3n+i}}{a_i^2}\end{array}\right. \\
+\binom{m}{1}\frac{a_{4n+i}}{a_i}
\end{array}\right| x^{4n}+\cdots.
$$

Für den Fall, wo das Verhältniss zweier aufeinanderfolgenden Coefficienten in der gegebenen Partialfunction $f_{n,i}(x)$ constant bleibt, also

$$\frac{a_{qn+i}}{a_{(q-1)n+i}}=\frac{1}{c},$$

wo die Reihe also innerhalb des Kreises mit dem Radius

$$R < \text{mod.}\, c^{\frac{1}{n}}$$

convergent ist, nimmt (Ω') offenbar die Form an

$$\left[\frac{f_{n,i}(x)}{a_i x^i}\right]^m=\sum_0^\infty{}_q\binom{m+q-1}{q}\left(\frac{x^n}{c}\right)^q.$$

Weil nun der mit q variirende Binomialcoefficient die Einheit zur Grenze hat, so ist die Entwickelung nach unseren Formeln für $[f_{n,i}(x)]^m$ in demselben Gebiete

$$\text{mod.}\,\frac{x^n}{c} < 1$$

convergent, wie $f_{n,i}(x)$, wie zu erwarten war.

Die Fälle eines variabeln Verhältnisses kann man mit Hilfe des bekannten Mittelwerthsatzes auf den obigen zurückführen.

e) Man kann sich folgendes Problem stellen. Es sollen die noch unbestimmten Coefficienten a in $f_{n,i}(x)$ so bestimmt werden, dass $f_{n,i}(x)$ einer gegebenen Gleichung genüge. Lösen wir zunächst die allereinfachste

Aufgabe. Wie müssen die Coefficienten a_{qn+i} beschaffen sein, damit $f_{n,i}(x)$ für alle Werthe von x in der Umgebung von $x = 0$ eine Wurzel der nach z binomischen Gleichung

$$z^m - a_i x^{mi} - m a_i^{m-1} a_{n+i} x^{n+mi} = 0$$

repräsentire, und wie gross ist der grösste Radius dieser Umgebung?

Auflösung 1. Die Coefficienten von x^{qn} in (Ω') müssen alle, sofern $q > 1$ ist, einzeln verschwinden. Darnach bekommt man die Gleichung

$$\frac{a_{2n+i}}{a_i} = \frac{1-m}{2}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^2,$$

und wenn man diesen Werth in den nächsten Coefficienten einsetzt, so bekommt man

$$\frac{a_{3n+i}}{a_i} = \frac{(1-m)(1-2m)}{2\cdot 3}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^3$$

etc., und so allgemein

$$\frac{a_{qn+i}}{a_i} = \frac{1(1-m)(1-2m)\cdots(1-(q-1)m)}{q!}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^q$$

$$= \frac{\prod\limits_{\lambda=0}^{q-1}(1-\lambda m)}{q!}\left(\frac{a_{n+i}}{a_i}\right)^q.$$

Unsere gesuchte Partialfunction lautet also

$$f_{n,i}(x) = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + \frac{1(1-m)}{1\cdot 2}\,\frac{a_{n+i}^2}{a_i}\,x^{2n+i}$$

$$+ \frac{1(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{a_{n+i}^3}{a_i^2}\,x^{3n+i} + \cdots.$$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder lautet im Allgemeinen

$$\left(\frac{m+1}{q} - m\right)\frac{a_{n+i}}{a_i}\,x^n = \mathfrak{N}_q\,\frac{a_{n+i}}{a_i}\,x^n,$$

und weil der Zahlencoefficient $\mathfrak{N}_q$ dem Grenzwerth

$$\lim_{q=\infty}\left(\frac{m+1}{q} - m\right) = -m$$

sich nähert, so bleibt $f_{n,i}(x)$ convergent und zugleich Wurzel

der gegebenen Gleichung *innerhalb* des Kreises mit dem Radius

$$R \leqq \text{mod.} \left(\frac{a_i}{m\, a_{n+i}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Es ist für diesen speciellen Fall leicht, die Bedingungen anzugeben, unter welchen die circumplexen Functionen m^{ter} Classe von $f_{n,i}(x)$ innerhalb dieses Gebietes sogar *sämmtliche* m Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen. Wir werden aber weiter unten dieses Kriterium viel allgemeiner aufstellen.

Zweite Auflösung. Sollen in (Ω') innerhalb eines endlichen Gebietes sämmtliche Glieder mit x^{qn} für $q > 1$ identisch verschwinden, so wird in diesem Gebiete die Gleichung bestehen

$$\frac{f_{n,i}(x)}{a_i x^i} = 1 + m \frac{a_{n+i}}{a_i} x^n.$$

Setzt man für einen Augenblick $m \frac{a_{n+i}}{a_i} x^n = \xi$, bezeichnet ferner die linke Seite mit $\varphi(\xi)^m$ und entwickelt

$$\varphi(\xi) = (1 + \xi)^{\frac{1}{m}}$$

nach dem binomischen Lehrsatz, so gilt innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 in der ξ-Ebene die Reihe

$$\varphi(\xi) = 1 + \frac{1}{m}\xi + \frac{1(1-m)}{1\cdot 2\cdot m^2}\xi^2 + \cdots + \frac{\prod_{\lambda=0}^{q-1}(1-\lambda m)}{q!}\left(\frac{\xi}{m}\right)^q + \cdots,$$

also innerhalb $\text{mod.}\, x < \text{mod.} \left(\frac{a_i}{m\, a_{n+i}}\right)^{\frac{1}{n}}$ gilt, wie oben, die Reihe

$$f_{n,i}(x) = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + \sum_{2}^{\infty}{}_q\, N_q \frac{a_{n+i}^q}{a_i^{q-1}} x^{qn+i}$$

und ist sie in diesem Gebiete Wurzel der vorgelegten Gleichung.

f) In Anschluss an die Bemerkungen (1) und (2) am Schlusse von § 4 bemerken wir auch hier, dass in der m^{ten}

Potenz einer i^{ten} Partialfunction n^{ter} Classe alle Coefficienten homogene Functionen von

$$a_i,\ a_{n+i},\ a_{2n+i},\ \cdots,\ a_{qn+i}$$

von constanter m^{ter} Dimension sind, und was das Gewicht betrifft, so ist dasselbe bei dem Coefficienten von x^q genau gleich q. Und weil die m^{te} Potenz einer i^{ten} Partialfunction wiederum eine $(mi)^{\text{te}}$ Partialfunction derselben n^{ten} Classe ist, so gilt für das Gewicht der Coefficienten, wenn man dasselbe mit G bezeichnet, die Congruenz

$$G \equiv mi (\text{mod. } n),$$

ebenso wie für die betreffenden Exponenten

$$\varepsilon \equiv mi (\text{mod. } n).$$

Ganz Aehnliches konnten wir auch oben bei dem Producte von $f_{n,i_1}(x)$ und $f_{n,i_2}(x)$ bemerken, dass nämlich die Coefficienten alle von der zweiten Dimension sind und vom Gewichte (übereinstimmend mit dem entsprechenden Exponenten)

$$G \equiv i_1 + i_2 (\text{mod. } n).$$

Es ist nun auf Grund der erwähnten Bemerkungen leicht einzusehen, dass dasselbe auch bestehen bleiben muss, wenn die Anzahl der Factoren eine beliebige ist, und ganz analog, wenn beliebig viele darunter gleiche sind. Man hat also ganz allgemein den

Lehrsatz B. Ist $F(x)$ eine ganze homogene und isobarische Function m^{ten} Grades und vom Gewichte G von den Partialfunctionen n^{ter} Classe

$$p'_{n,i_1},\ p''_{n,i_2},\ \cdots,\ p^{(\varkappa)}_{n,i_\varkappa}$$

aus den entsprechenden Hauptfunctionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_\varkappa(x),$$

wobei

$$f_\varkappa(x) = \sum_0^\infty {}^q\, a_{\varkappa,q}\, x^q$$

ist, so ist $F(x)$ ebenfalls eine Partialfunction n^{ter} Classe, deren Ordinalindex

$$i = m_1 \cdot i_1 + m_2 \cdot i_2 + \cdots + m_\varkappa \cdot i_\varkappa,$$

oder genauer

$$i \equiv m_1 \cdot i_1 + m_2 \cdot i_2 + \cdots + m_\varkappa \cdot i_\varkappa \ (\text{mod. } n),$$

wobei

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\varkappa = m$$

den Grad und

$$m_1 \cdot i_1 + m_2 \cdot i_2 + \cdots + m_\varkappa \cdot i_\varkappa = G$$

das Gewicht der Coefficienten von $F(x)$ ausdrückt, für welche übrigens die Formeln (I) *und* (II) *gelten, so dass sie alle von der m^{ten} Dimension und (übereinstimmend mit den entsprechenden Exponenten) vom Gewichte G.*

Es bedarf hier keines besonderen Beweises, da die Behauptung aus lauter solchen Behauptungen zusammengesetzt ist, deren Richtigkeit bereits bewiesen ist, und aus denen die erstere direct folgt.

g) Vergleicht man die Formeln (I) und (II) mit einander, so ergiebt sich die identische Gleichung

$$(L) \qquad \frac{S_n^\mu d(C_0)}{\mu!} = \sum_1^\lambda {}_t (-1)^{t-1} \frac{s_n^t d(C_{\mu-t})}{t!},$$

(wenn nämlich in der für alle ganzzahlige Werthe von $t = 1, 2, \cdots, \mu$ gültigen Formel (II) von dem speciellen Werthe $t = \mu$ Gebrauch gemacht wird).

Diese Gleichung (L) stimmt genau überein mit der allgemeinen Formel (K) in § 4, in welcher nur anstatt $\varphi(K)$ hier C_μ getreten ist. Nun haben wir aber die Gültigkeit von (I) und (II) und somit auch von (L) für die Fälle bewiesen, wo C_0 eine ganze homogene Function von $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_\varkappa}$ ist; folglich ist hiermit der oben (pag. 23) versprochene Beweis von (K) für diesen speciellen Fall von

$$F(u_1) = u_1^m, \quad \text{oder auch} \quad (u_1, u_{n+1}, u_{2n+1}, \cdots)^m,$$

welchen wir hauptsächlich brauchen, geliefert.

h) Man kann nach dem Obigen jede in eine Potenzreihe entwickelbare Function überhaupt mit Hilfe der Formeln (I) und (II) formell darstellen (s. pag. 28), nämlich, wenn C_μ den Coefficienten von $x^{\mu n+i}$ bedeuten soll,

nach (I)

$$(M) \quad f_{n,i}(x) = \sum_0^\infty {}_q \left\{ \sum_1^\lambda {}_t (-1)^{t-1} \cdot \frac{s_{n,i}^t d(C_{q-t})}{t!} \right\} x^{qn+i},$$

wenn die Bestimmungen für die Potenzreihe durch eine recurrirende, zwischen t Coefficienten derselben stattfindende Bedingungsgleichung ausgedrückt sind; oder auch

nach (II)

$$f_{n,i}(x) = \frac{S^t_{n,i} d(C_{q-t})}{q(q-1)\cdots(q-t+1)} x^{q^{n+i}},$$

wenn die Bedingungen einen beliebigen Coefficienten durch einen beliebigen vorhergehenden bestimmen. Diese Darstellungsweise, welche, wie wir gesehen haben, zugleich auch die Form derjenigen Function $F(x)$, welche eine gewisse ganze Function von unserer $f_{n,i}(x)$ sein soll, in sich fasst, hat noch ausserdem den Vortheil, dass sie gewisse Eigenschaften der Coefficienten ganzer Functionen von Partialfunctionen ganz besonders ausprägt. Ja sogar mehr als das. Da nämlich eine Potenzreihe überhaupt eine unendliche Summe von ganzen Functionen ist, so müssen unter denjenigen Berücksichtigungen, unter welchen der Uebergang von ganzen *rationalen* zu ganzen *transcendenten*, oder *irrationalen* Functionen (um den Ausdruck von Weierstrass zu gebrauchen) gestattet ist, die obigen Formeln (I) und (II) auch für $F(f(x))$ gelten, wenn $F(x)$ selbst eine gewisse Potenzreihe von x ist. Es würden sich daran ganz analoge Untersuchungen knüpfen lassen, wie die Weierstrass'schen für die Begründung der analytischen Functionen durch den Uebergang von den endlichen ganzen Functionen zu den unendlichen. Oder strenger gesagt, es würden sich jene Untersuchungen in der Form unserer Darstellungsweise erkennen lassen. — Dass sich allgemeine Gesetze über Potenzreihen durch diese Formeln (da wo sie gelten) ausdrücken lassen müssen, ist eigentlich von selbst verständlich, weil diese Formeln (wo sie gelten) nicht minder als die Maclaurin'sche Reihe das Bildungsgesetz aller Coefficienten in sich fassen und sich von jener wesentlich nur darin unterscheiden, dass jene sich auf die *Werthe* der Function für gewisse Werthe der Variabeln bezieht, während unsere Formeln auf die allgemeine *Form* der Function als Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Bezug nehmen, und deshalb sind sie überall in solchen Fällen

mit Vortheil anwendbar, wo es sich um identische Relationen zwischen den Coefficienten handelt, wie diejenigen es sind, welche zwischen den Wurzeln und den Coefficienten allgemeiner (*litteraler*) Gleichungen, oder zwischen den Coefficienten transformirter Formen, Invarianten etc.

Es ist jedoch hier nicht gut möglich, darauf näher einzugehen, ohne sich vom Ausgangspunkte zu sehr zu entfernen; im Folgenden soll vorläufig nur ein Beispiel dafür gegeben sein, wie man schon aus den obigen Bemerkungen nützliche Folgerungen ziehen kann. Aber zunächst noch eine ergänzende Bemerkung für die Ausdehnung jener Gesetze auf eine beliebige ganze rationale Function (nicht blos eine homogene) m^{ten} Grades.

i) Obwohl jene Sätze für eine algebraische Summe gelten, falls sie für die einzelnen Summanden richtig sind, so gelten die obigen Lehrsätze (*A*) und (*B*) ohne Weiteres nur dann für eine Summe von Potenzen, oder von verschiedenen ganzen homogenen Functionen von Partialfunctionen, wenn die Summe aus Summanden von gleichem Gewichte (isobarisch) besteht, sofern man das Resultat nach Potenzen derselben Variabeln, wie die ursprünglichen Partialfunctionen geordnet haben will. Nehmen wir z. B.

$$m = n = 5$$

und entwickeln nach (Ω) die 5ten Potenzen der Partialfunctionen

$$p_{5,1},\quad p_{5,2},\quad p_{5,3},\quad p_{5,4},$$

so bekommt man:

$$\begin{aligned}
p_{5,1}^5 &= a_1{}^5 x^5 + 5a_1{}^4 a_6 x^{10} + (5a_1{}^4 a_{11} + 10a_1{}^3 a_6{}^2)\, x^{15} \\
&\quad + (5a_1{}^4 a_{16} + 20a_1{}^3 a_6 a_{11} + 10a_1{}^2 a_6{}^3)\, x^{20} + \cdots, \\
p_{5,2}^5 &= a_2{}^5 x^{10} + 5a_2{}^4 a_7 x^{15} + (5a_2{}^4 a_{12} + 10a_2{}^3 a_7{}^2)\, x^{20} \\
&\quad + (5a_2{}^4 a_{17} + 20a_2{}^3 a_7 a_{12} + 10a_2{}^2 a_7{}^3)\, x^{25} + \cdots, \\
p_{5,3}^5 &= a_3{}^5 x^{15} + 5a_3{}^4 a_8 x^{20} + (5a_3{}^4 a_{13} + 10a_3{}^3 a_8{}^2)\, x^{25} \\
&\quad + (5a_3{}^4 a_{18} + 20a_3{}^3 a_8 a_{13} + 10a_3{}^2 a_8{}^3)\, x^{30} + \cdots, \\
p_{5,4}^5 &= a_4{}^5 x^{20} + 5a_4{}^4 a_9 x^{25} + (5a_4{}^4 a_{14} + 10a_4{}^3 a_9{}^2)\, x^{30} \\
&\quad + (5a_4{}^4 a_{19} + 20a_4{}^3 a_9 a_{14} + 10a_4{}^2 a_9{}^3)\, x^{35} + \cdots,
\end{aligned}$$

wobei in jeder dieser Gleichungen die Dimension constant $= 5$ ist, während das Gewicht rechter Hand einer jeden Gleichung im ersten Gliede gleich dem Gewichte linker Hand ist, und in jedem weiteren Gliede steigt dasselbe um 5. Man sieht auch, dass alle Glieder in p^5_{5,i_1} aus den entsprechenden Gliedern in p^5_{5,i_2} direct dadurch, dass man auf alle Indices die Substitution $\binom{z+i_1-i_2}{z}$ ausübt, erhalten werden. Dasselbe gilt auch natürlich allgemein für die Erhaltung von $f_{n,i_1}(x)^m$ aus $f_{n,i_2}(x)^m$, wie man aus (Ω) leicht ersehen kann.

Ferner findet offenbar unter den Coefficienten von x in jeder der Gleichungen jedes der Gesetze A und B statt. Bildet man aber die Summe dieser Gleichungen und ordnet wiederum nach steigenden Potenzen von x, so kann in der Summe der Coefficient von x^{10}, welcher eine Summe der Coefficienten von x^{10} in den beiden ersten Gleichungen ist, nicht aus dem Coefficienten von x^5 in der Summe, der *lediglich* aus dem Coefficienten von x^5 in der *ersten* Gleichung *allein* besteht, durch die sd-Operation erhalten werden, weil diese Operation, ausgeübt auf den Coefficienten von x^5 in der ersten Gleichung, *bloss* den Coefficienten von x^{10} in jener *ersten* Gleichung liefert. Ebenso wenig kann in der Summe der Coefficient von x^{15}, der aus den *drei* Coefficienten von x^{15} in den *drei* ersten Gleichungen entstanden ist, aus dem Coefficienten von x^{10} in der Summe, zu welchem *nur* die *ersten zwei* Gleichungen beigetragen haben, durch Substitutionaldifferentiation erhalten werden, und ganz aus demselben Grunde ebensowenig der von x^{20} aus dem von x^{15}. Dagegen liefert (bis auf einen Zahlencoefficienten) die Operation $S_n d$, ausgeübt auf *jeden* Coefficienten von x^{qn} für $q \geqq 4$ jeweils den nächstfolgenden Coefficienten, weil von x^{20} an jeder Coefficient in der Summe bis auf einen Zahlencoefficienten die Summe *aller* Coefficienten von entsprechenden x^{qn} in *allen* einzelnen Gleichungen ist; und weil für jeden Summanden das Gesetz (*II*) in A gilt, so gilt es auch für die Summe. — Man erkennt leicht, dass ganz dasselbe auch stattfinden muss für eine Summe von *homogenen* Functionen desselben Grades und von verschiedenem Gewichte: auch dort *beginnt* (abgesehen von einem Zahlencoefficienten) *die Gültigkeit von* (*I*) *und* (*II*)

von dem Coefficienten von x^M an zu bestehen, wobei M das Maximum unter den verschiedenen Gewichten der einzelnen Summanden ist.

In der That gilt (bis auf einen Zahlencoefficienten) dieses Gesetz von dem Gliede mit x^{20} an in folgender Summe

$$p_{5,1}^5 + p_{5,2}^5 + p_{5,3}^5 + p_{5,4}^5 + 20p_{5,2} \cdot p_{5,3}(p_{5,1}^2 p_{5,3} + p_{5,4}^2 p_{5,2})$$

$$= a_1^5 x^5 + \left| \begin{array}{l} 5a_1^4 a_6 \\ + a_2^5 \\ + 20a_1^2 a_2 a_3^2 \end{array} \right| x^{10} + \left| \begin{array}{l} 10a_1^3 a_6^2 + 5a_1^4 a_{11} + 5a_2^4 a_7 + a_3^5 \\ + 20[a_3(a_1^2 a_3 a_7 + a_2^2 a_4^2) \\ + 2a_1 a_2 a_3 (a_1 a_8 + a_3 a_6)] \end{array} \right| x^{15} +$$

$$+ \left| \begin{array}{l} 10a_1^2 a_6^3 + 20a_1^3 a_6 a_{11} + 5a_1^4 a_{16} + 10a_2^3 a_7^2 \\ + 5a_2^4 a_{12} + 5a_3^4 a_8 + a_4^5 + \\ + 20[a_1^2(a_2 a_8^2 + 2a_2 a_3 a_{13} + 2a_3 a_7 a_8 + a_3^2 a_{12}) \\ + a_2^2(2a_3 a_4 a_9 + a_4^2 a_8) \\ + a_3^2(2a_1 a_6 a_7 + 2a_1 a_2 a_{11} + a_2 a_6^2) \\ + a_4^2(2a_2 a_3 a_7) + 4a_1 a_2 a_3 a_6 a_8] \end{array} \right| x^{20} + \cdots,$$

welche wir weiter unten gebrauchen werden.

Zweites Capitel.

Erweiterung der sd-Operation und Anwendung derselben.

§ 6.

Inverse Functionen von Cofunctionen.

A. *Inverse Functionen von Partialfunctionen.*

a) Es ist leicht einzusehen, dass die obigen Formeln (I) und (II) auch für Coefficienten einer negativen m^{ten} Potenz einer beliebigen i^{ten} Partialfunction n^{ter} Classe gelten. Denn man kann sich zunächst überzeugen, dass das Gesetz für $m = -1$ gültig ist, indem man durch gemeine Division

$$(\lambda)\quad [f_{n,i}(x)]^{-1} = \frac{1}{f_{n,i}(x)} = a_i^{-1} x^{-i} - a_i^{-2} a_{n+i} x^{n-i}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} a_i^{-3} a_{n+i}^2 \\ - a_i^{-2} a_{2n+i} \end{array}\right| x^{2n-i} \left.\begin{array}{l} - a_i^{-4} a_{n+i}^3 \\ + 2 a_i^{-3} a_{n+i} a_{2n+i} \\ - a_i^{-2} a_{3n+i} \end{array}\right| x^{3n-i} + \cdots$$

eine $(-i)^{\text{te}}$ Partialfunction n^{ter} Classe erhält, deren Coefficienten nach jenem Gesetze gebildet sind, und zwar sind sie von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension und vom Gewichte

$$G \equiv -i \pmod{n}.$$

Ebenso sieht man leicht, dass das Quadrat von $\frac{1}{f_{n,i}(x)}$, nach dem bekannten Gesetze gebildet, eine $(-2)\cdot i^{\text{te}}$ Partialfunction n^{ter} Classe

$$[f_{n,i}(x)]^{-2} = a_i^{-2}x^{-2i} - 2a_i^{-3}a_{n+i}x^{n-2i} + \left.\begin{matrix} 3a_i^{-4}a_{n+i}^2 \\ - a_i^{-3}\,a_{2n+i} \end{matrix}\right| x^{2n-2i}$$

$$\left.\begin{matrix} -4a_i^{-5}a_{n+i}^3 \\ +6a_i^{-4}a_{n+i}a_{2n+i} \\ -2a_i^{-3}a_{3n+i} \end{matrix}\right| x^{3n-2i} + \cdots$$

liefert, deren Coefficienten von der $(-2)^{\text{ten}}$ Dimension und vom Gewichte $G \equiv -2i \pmod{n}$ sind, und man sieht sofort, dass jene Formeln (I) und (II) für $m = -1$ und $m = -2$ wohl gelten. Nimmt man nun an, dass dasselbe Gesetz auch für $m = -q$ gilt, so dass

$$(\mu) \qquad \frac{1}{[f_{n,i}(x)]^q} = a_i^{-q}x^{-qi} + \binom{-q}{1} a_i^{-q-1}\,a_{n+i}x^{n-qi}$$

$$+ \left.\begin{matrix} \binom{-q}{2} a_i^{-q-2}\,a_{n+i}^2 \\ + \binom{-q}{1} a_i^{-q-1}a_{2n+i} \end{matrix}\right| x^{2n-qi} + \left.\begin{matrix} \binom{-q}{3} a_i^{-q-3}\,a_{n+i}^3 \\ +2\binom{-q}{2} a_i^{-q-2}\,a_{n+i}a_{2n+i} \\ + \binom{-q}{1} a_i^{-q-1}\,a_{3n+i} \end{matrix}\right| x^{3n-qi} + \cdots$$

mit jenen Formeln übereinstimmend gebildet ist, so erfolgt offenbar durch Multiplication von (μ) mit (λ) eine Formel für

$$\frac{1}{[f_{n,i}(x)]^{q+1}} = [f_{n,i}(x)]^{-(q+1)}$$

in der Gestalt

$$[f_{n,i}(x)]^{-(q+1)} = a_i^{-(q+1)}\,x^{-(q+1)i} + \binom{-(q+1)}{1} a_i^{-(q+1)-1}a_{n+i}x^{n-(q+1)i}$$

$$+ \left.\begin{matrix} \binom{-(q+1)}{2} a_i^{-(q+1)-2}\,a_{n+i}^2 \\ + \binom{-(q+1)}{1} a_i^{-(q+1)-1}\,a_{2n+i} \end{matrix}\right| x^{2n-(q+1)i} +$$

$$+ \left.\begin{matrix} \binom{-(q+1)}{3} a_i^{-(q+1)-3}\,a_{n+i}^3 \\ +2\binom{-(q+1)}{2} a^{-(q+1)-2}\,a_{n+i}\,a_{2n+i} \\ + \binom{-(q+1)}{1} a_i^{-(q+1)-1}\,a_{3n+i} \end{matrix}\right| x^{3n-(q+1)i} + \cdots,$$

was genau mit Ω für $m = -(q+1)$ übereinstimmt. Gilt also das Gesetz für $m = -q$, so gilt es auch für $m = -(q+1)$; es gilt aber für $m = -1$ und für $m = -2$, folglich auch für $m = -3$, $m = -4$ etc., also allgemein.

b) Nun hat Jacobi gezeigt, dass wenn $y = f(x)$ eine nach steigenden Potenzen von x entwickelbare Function von x ist, in welcher das Glied mit der *ersten* Potenz der Variabeln x^1 nicht Null ist, nämlich

$$y = \sum_1^\infty {}^q\, a_q x^q,$$

die inverse Function $x = \varphi(y)$ ebenfalls als Potenzreihe

$$x = \sum_1^\infty {}^q\, b_q y^q$$

dadurch gebildet wird, dass

$$b_q = \frac{1}{q} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{y^q}\right)$$

gesetzt wird, wobei, in bekannter Weise,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{y^q}\right)$$

den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der nach steigenden Potenzen von x entwickelten Reihe von $\frac{1}{y^q}$ bedeutet.

Für $y_{n,i} = f_{n,i}(x)$ ist aber wie wir gesehen haben, $\frac{1}{[f_{n,i}(x)]^q}$ eine $(-qi)^{\text{te}}$ Partialfunction n^{ter} Classe, d. h. eine Potenzreihe, deren Exponenten ε die Congruenz befriedigen

$$\varepsilon \equiv -qi \pmod{n}.$$

Fehlt nun in $f_{n,i}(x)$ das Glied mit x^1 nicht, d. h. ist $i = 1$, so wird die allgemeine Congruenz für die Exponenten von $[f_{n,1}(x)]^{-q}$ einfacher

$$\varepsilon \equiv -q \pmod{n},$$

so dass für den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ nothwendiger Weise die Bedingungsgleichung

$$pn - q = -1,$$

oder die Congruenz

$$q \equiv 1 \pmod{n}$$

befriedigt werden muss, wenn der betreffende Coefficient b_q in der inversen Function existiren soll. Daraus folgt der

Lehrsatz. *Die inverse Function einer ersten Partialfunction n^{ter} Classe ist (sofern der Coefficient a_1 von x^1 von Null verschieden ist) wiederum eine erste Partialfunction derselben n^{ten} Classe, deren Coefficienten aus der obigen Formel (μ) erhalten werden, wenn man sie vorerst durch q in beiden Seiten dividirt, darin $i = 1$ setzt und dann für b_1 das erste Glied rechts nimmt und darin $q = 1$ setzt; das zweite Glied liefert, wenn man in demselben $q = n + 1$ setzt, den Coefficienten b_{n+1}, etc. Das μ^{te} Glied liefert für $q = (\mu - 1)\, n + 1$ den Coefficienten $b_{(\mu-1)n+1}$.*

Es ist somit

$$b_1 = \frac{1}{a_1}; \quad b_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{a_1^{n+2}}; \quad b_{2n+1} = \frac{(n+1)\, a_{n+1}^2 - a_1\, a_{2n+1}}{a_1^{2n+3}};$$

$$b_{3n+1} = -\frac{(3n+2)(3n+3)}{3!} \frac{a_{n+1}^3}{a_1^{3n+4}} + (3n+2) \frac{a_{n+1}\, a_{2n+1}}{a_1^{3n+3}} - \frac{a_{3n+1}}{a_1^{3n+2}} \quad \text{etc.}$$

Es ist zugleich in dieser Form ersichtlich, dass die Bedingung, dass a_1 von Null verschieden sei, nothwendig war, da sonst alle b unendlich gross geworden wären.

Man thut indess besser daran, wenn man den Divisor q in jedem Gliede stehen lässt, wodurch die erhaltene Form der Potenzreihe für die inverse Function unserer ersten Partialfunction n^{ter} Classe mit der Potenzreihe für $\left[\frac{f_{n,1}(x)}{a_1 x}\right]^m x$ eine derartige directe Analogie erhält, welche es ermöglicht die eine von der andern direct mechanisch abzuschreiben. Setzt man nämlich die obigen Werthe für b_{qn+1} ein, so bekommt man für die inverse Function:

$$(\Omega_1)\qquad \begin{aligned} x = \frac{y}{a_1} &+ \binom{-(n+1)}{1}\frac{a_{n+1}}{a_1}\cdot\frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{n+1}}{n+1} \\ &+ \left[\binom{-(2n+1)}{2}\frac{a_{n+1}^2}{a_1^2} + \binom{-(2n+1)}{1}\frac{a_{2n+1}}{a_1}\right]\frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{2n+1}}{2n+1} \\ &+ \left[\binom{-(3n+1)}{3}\frac{a_{n+1}^3}{a_1^3} + 2\binom{-(3n+1)}{2}\frac{a_{n+1}a_{2n+1}}{a_1^2} + \binom{-(3n+1)}{1}\frac{a_{3n+1}}{a_1}\right]\frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{3n+1}}{3n+1} \\ &+ \left[\binom{-(4n+1)}{4}\frac{a_{n+1}^4}{a_1^4} + 3\binom{-(4n+1)}{3}\frac{a_{n+1}^2a_{2n+1}}{a_1^3} + \left\{\begin{aligned}&+1\binom{-(4n+1)}{2}\frac{a_{2n+1}^2}{a_1^2}\\ &+2\binom{-(4n+1)}{2}\frac{a_{n+1}a_{3n+1}}{a_1^2}\end{aligned}\right. + \binom{-(4n+1)}{1}\frac{a_{4n+1}}{a_1}\right]\frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{4n+1}}{4n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

eine Formel, welche sich von der für $\frac{1}{m}\,\frac{a_1^m\,\xi^{m+1}}{[f_{n,1}(\xi)]^m}$ nur in folgenden Merkmalen unterscheidet:

1) Während dort rechter Hand m einen constanten Werth hat, variirt hier $-m$ ganzzahlig und zwar nimmt es successive die Werthe der aufeinander folgenden entsprechenden Exponenten an:

$$-m = 1,\ n+1,\ 2n+1,\ \cdots,\ qn+1;$$
$$\left(\text{dabei ist aber } \binom{-1}{0} = 1\right).$$

2) Anstatt des dortigen ξ hat man hier $\frac{y}{a_1}$, und endlich wird noch

3) jedes Glied $\left(\frac{y}{a_1}\right)^{qn+1}$ hier durch $qn+1$ dividirt, während dort der gemeinschaftliche constante Divisor m bei allen Gliedern auftritt.

Ist nun speciell $\frac{a_{qn+1}}{a_{(q-1)n+1}} = \frac{1}{c}$, so wird auch hier (ähnlich wie in (Ω'))

$$x = \frac{y}{a_1} + \binom{-(n+1)}{1} \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^1 \frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{n+1}}{n+1}$$
$$+ \binom{-(2n+1)+1}{2} \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^2 \frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$
$$+ \binom{-(3n+1)+2}{3} \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^3 \frac{\left(\frac{y}{a_1}\right)^{3n+1}}{3n+1} + \cdots,$$

und die Convergenzbedingung für diese inverse Function (x als Function von y) ist

$$\text{mod.} \left[(1-n) \frac{a_{n+1}}{a_1} y^n\right] < 1,$$

also

$$\text{mod.}\, y < \text{mod.} \left[(1-n) \frac{a_{n+1}}{a_1}\right]^{\frac{1}{n}},$$

während die Convergenzbedingung für die directe Function (y als Function von x)

$$\text{mod.}\, x < \text{mod.} \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ist.

c) Ist aber i von 1 verschieden, dabei aber grösser als Null und relativ prim zu n, so kann man zuerst diese gegebene i^{te} Partialfunction n^{ter} Classe

$$f_{n,i}(x) = y_{n,i} = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + a_{2n+i} x^{2n+i} + \cdots,$$

in welcher a_i von Null verschieden ist, nach Formel (Ω) zur Potenz $\frac{1}{i}$ erheben, wozu nur nöthig ist, in (Ω) $m = \frac{1}{i}$ zu setzen. Man erhält eine *erste* Partialfunction n^{ter} Classe

$$y_{n,i}^{\frac{1}{i}} = a_i^{\frac{1}{i}}\, x + \left(\tfrac{1}{i}\right) a_i^{\frac{1}{i}-1}\, a_{n+i}\, x^{n+1}$$

$$+ \left.\begin{matrix} \dfrac{\frac{1}{i}\left(\frac{1}{i}-1\right)}{1\cdot 2}\, a_i^{\frac{1}{i}-2}\, a_{n+i}^2 \\ + \frac{1}{i}\, a_i^{\frac{1}{i}-1}\, a_{2n+i} \end{matrix}\right| x^{2n+1} + \cdots,$$

aus welcher man dann x nach der obigen Methode nach ganzen Potenzen von $\left(y_{n,i}^{\frac{1}{i}}\right)$ entwickeln kann; wir bezeichnen diese Reihe

$$x_{\substack{i\\n,1}} = \varphi_{\substack{i\\n,1}}(y_{n,i}) = b_{\frac{1}{i}}\, y_{n,i}^{\frac{1}{i}} + b_{\frac{n+1}{i}}\, y_{n,i}^{\frac{n+1}{i}} + b_{\frac{2n+1}{i}}\, y_{n,i}^{\frac{2n+1}{i}} + \cdots.$$

Denkt man sich eine (vollständige) Reihe, welche fortschreitet nach ganzen positiven Potenzen von $y^{\frac{1}{i}}$, (welche Entwickelung weiter unten ausführlicher behandelt werden soll) und bezeichnet dieselbe mit

$$\varphi_i(y) = b_0 + b_{\frac{1}{i}}\, y^{\frac{1}{i}} + b_{\frac{2}{i}}\, y^{\frac{2}{i}} + \cdots = \sum_0^{\infty}{}^{q}\, b_{\frac{q}{i}}\, y^{\frac{q}{i}},$$

und zwar so, dass diejenigen b, welche mit den unsrigen gleichen Index haben, mit denselben beziehungsweise identisch sein sollen; setzt man ferner $r_n^{ih} y$ anstatt y, multiplicirt $\varphi_i(r_n^{ih} y)$ mit dem Factor $r_n^{-\varkappa ih}$ und nimmt dann die Summe, welche durch die ganzzahlige Variirung von

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

erhalten wird, so entsteht, kraft der Voraussetzung, dass i relativ prim zu n ist,

$$\sum_0^{n-1}{}^{h}\, r_n^{-\varkappa ih}\, \varphi_i(r_n^{ih} y) = \sum_0^{\infty}{}^{q}\, b_{\frac{q}{i}}\, y^{\frac{q}{i}}\, (s_{q-\varkappa}),$$

wobei $s_{q-\varkappa}$ die Summe der $(q-\varkappa)^{\text{ten}}$ Potenzen sämmtlicher Wurzeln von $x^n - 1 = 0$ bedeutet, so dass nur solche Glieder

bestehen bleiben (und zwar alle mit dem gemeinsamen Factor n multiplicirt), für welche $q \equiv \varkappa \pmod{n}$ ist. Man erhält also die identische Gleichung

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^h r_n^{-\varkappa i h}\varphi_i(r_n^{ih}y) = b_{\frac{\varkappa}{i}}\, y^{\frac{\varkappa}{i}} + b_{\frac{n+\varkappa}{i}}\, y^{\frac{n+\varkappa}{i}} + b_{\frac{2n+\varkappa}{i}}\, y^{\frac{2n+\varkappa}{i}} + \cdots$$
$$= \varphi_{i}(y)_{n,\varkappa}.$$

Wir nennen dieselbe, als Analogon zu den Cofunctionen mit ganzen Potenzen, eine $\varkappa^{\text{te}}$ Partialfunction n^{ter} Classe von der Hauptfunction $\varphi_i(y)$, welche nach Potenzen von $y^{\frac{1}{i}}$ fortschreitet. — Man sieht sofort, dass unsere inverse Function von $f_{n,i}(x)$ eine solche *erste* Partialfunction ($\varkappa = 1$) ist. Man kann also sagen: *Die inverse Function einer i^{ten} Partialfunction n^{ter} Classe ist, sofern i relativ prim zu n, und a_i von Null verschieden ist, immer eine erste Partialfunction derselben n^{ten} Classe einer Hauptfunction, welche nach Potenzen von $y^{\frac{1}{i}}$ fortschreitet. Diese inverse Function ist immer durch Substitutionaldifferentiation in angegebener Weise zu berechnen.*

In diesem Satze ist der in b) als specieller Fall für $i = 1$ enthalten.

d) Hat i mit n einen gemeinschaftlichen Theiler d, so setze man

$$x^d = \xi; \quad \frac{i}{d} = j \quad \text{und} \quad \frac{n}{d} = m;$$

und, indem dann die vorgelegte i^{te} Partialfunction n^{ter} Classe in x als eine j^{te} Partialfunction m^{ter} Classe in ξ betrachtet wird, nämlich:

$$y_{n,i} = f_{n,i}(x) = \sum_0^{\infty} a_{qn+i}\, x^{qn+i} = \sum_0^{\infty}{}^q\, a_{qmd+jd}\, x^{qmd+jd}$$
$$= \sum_0^{\infty}{}^q\, a_{(qm+j)d}\, \xi^{qm+j} = \psi_{m,j}(\xi) = \eta_{m,j};$$

die inverse Function (ξ als Function η) dieser j^{ten} Partialfunction m^{ter} Classe ist dann eine *erste* Partialfunction derselben m^{ten} Classe einer Hauptfunction, welche nach ganzen positiven Potenzen von $\eta^{\frac{1}{j}}$ fortschreitet. Oder, mit andern

Worten: x^d *ist eine* **erste** *Partialfunction* $\left(\frac{n}{d}\right)^{ter}$ *Classe einer Hauptfunction, welche nach ganzen positiven Potenzen von* $y_{n,i}^{\frac{d}{i}}$ *fortschreitet.*

e) Der Fall der inversen Function der *nullten* Partialfunction erfordert noch eine besondere Behandlungsweise, da für $i = 0$ jene Bedingungsgleichung, oder die daraus entstammende Congruenz keinen Sinn giebt.

Man kann aber in diesem Falle in folgender Weise verfahren. Man setze nämlich in

$$y_{n,0} = f_{n,0}(x) = a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + \cdots$$

$x^n = \xi$ und $y_{n,0} - a_0 = \eta_{1,1}$.

Man erhält so

$$\eta_{1,1} = a_n \xi + a_{2n} \xi^2 + a_{3n} \xi^3 + \cdots = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \cdots$$
$$a_{qn} = \alpha_q,$$

wonach aus der obigen Formel (μ), wenn man darin

$$n = 1, \quad i = 1$$

setzt, sich ergiebt:

$$\frac{1}{\eta^q} = \alpha_1^{-q} \xi^{-q} + \binom{-q}{1} \alpha_1^{-q-1} \alpha_2 \xi^{1-q} + \left| \begin{matrix} \binom{-q}{2} \alpha_1^{-q-2} \alpha_2^2 \\ + \binom{-q}{1} \alpha_1^{-q-1} \alpha_3 \end{matrix} \right| \xi^{2-q} + \left| \begin{matrix} \binom{-q}{3} \alpha_1^{-q-3} \alpha_2^3 \\ +2\binom{-q}{2} \alpha_1^{-q-2} \alpha_2 \alpha_3 \\ + \binom{-q}{1} \alpha_1^{-q-1} \alpha_4 \end{matrix} \right| \xi^{3-q} + \cdots$$

und wenn man darin nach und nach

$$q = 1, 2, 3, \cdots, \infty$$

gesetzt sich denkt, jedesmal den Coefficienten von $\frac{1}{\xi}$ nimmt und mit $\frac{1}{q}$ multiplicirt, so erhält man *unter der Bedingung:*

$$a_n = \alpha_1 \gtrless 0,$$

$$x^n = \xi = 1 + \alpha_1^{-1}\,\eta - \alpha_1^{-3}\,\alpha_2\eta^2 + (2\alpha_1^{-5}\alpha_2^2 - \alpha_1^{-4}\alpha_3)\,\eta^3$$
$$- (5\alpha_1^{-7}\alpha_2^3 - 5\alpha_1^{-6}\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^{-5}\alpha_4)\,\eta^4 + \cdots,$$

also:

$$x^n = 1 + \frac{1}{a_n}(y_{n,0} - a_0) - \frac{a_{2n}}{a_n^3}(y_{n,0} - a_0)^2$$
$$+ \frac{2a_{2n}^2 - a_n a_{3n}}{a_n^5}(y_{n,0} - a_0)^3$$
$$- \frac{5(a_{2n}^3 - a_n a_{2n} a_{3n}) + a_n^2 a_{4n}}{a_n^7}(y_{n,0} - a_0)^4 + \cdots.$$

f) Als Beispiele können die zuerst in der Mathematik überhaupt gebildeten inversen Functionen angeführt werden, nämlich die sogenannten goniometrischen und cyclometrischen. So ist

$$(1) \qquad y = \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

eine *erste* Partialfunction 2ter Classe und es ist die entsprechende inverse Function

$$x = \arcsin y = \frac{y}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{y^5}{5} + \cdots$$

in der That ebenfalls eine *erste* Partialfunctien 2ter Classe, und zwar ist sie genau nach dem Obigen gebildet.

Ebenso sind

$$(2) \qquad y = \operatorname{tg} x = T_1\,\frac{x}{1} + T_3\,\frac{x^3}{3!} + T_5\,\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

und

$$x = \operatorname{arctg} y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - + \cdots$$

entsprechende inverse *erste* Partialfunctionen 2ter Classe.

Und ganz ebenso ist auch

$$(3) \qquad \log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - + \cdots;$$

$$\log(y) = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - + \cdots$$

die inverse Function *erster Classe*, welche der *nullten* Partialfunction *erster Classe*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

entspricht, die aber (mit dem Obigen übereinstimmend) nach dem besonderen, für $i = 0$ erforderlichen Verfahren behandelt ist. —

Uebrigens ist

$$1 - \log(1 - y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots$$

die Hauptfunction, von welcher

$$r_4^{-1} \operatorname{arctg}(r_4 y) = + \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots$$

eine erste Partialfunction *zweiter* Classe ist.

g) Als ferneres Beispiel nehmen wir eine Function, welche für uns später noch von Nutzen sein soll. Es sei nämlich zur Bestimmung des allgemeinen Coefficienten von

$$y = \sum_0^\infty {}^p\, a_p x^p$$

die allgemeine Formel

$$a_p = \frac{\prod_0^{p-2} {}^\lambda\, (p - \lambda m)}{p!},$$

welche für $p > 2$ immer giltig ist (allerdings so, dass die nullte Partialfunction m^{ter} Classe dieser Function identisch Null ist, weil für $p \equiv 0 \pmod{m}$ offenbar $a_p = 0$ wird) gegeben, und ausserdem sei noch $a_1 = a_2 = 1$.

Nach der bekannten Abhandlung von Weierstrass „über die Theorie der analytischen Facultäten" (Crelle's Journal Bd. 51) lässt sich der Convergenzkreis dieser Reihe für ein beliebiges complexes m leicht angeben. Man erreicht aber auch dasselbe Resultat, welches für ein ganzzahliges m sich durch folgende einfache Ueberlegung ergiebt.

Da in einer h^{ten} circumplexen Function $f(r_n^h x)$ der Modul von x von h unabhängig ist und nur das Argument sich um

ganze Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ unterscheidet, so haben *alle circumplexen Functionen* einer beliebigen Classe einer gegebenen Potenzreihe, und mit ihnen auch zugleich *alle Partialfunctionen einer beliebigen aber endlichen n^{ten} Classe* (als endliche lineare Summe von den circumplexen) *mindestens denselben Convergenzkreis, wie die Potenzreihe der Hauptfunction.* Es können aber im Allgemeinen einzelne Partialfunctionen grössere Convergenzgebiete haben; jedenfalls ist aber die Potenzreihe für die Hauptfunction und somit auch jede circumplexe Function derselben mindestens in dem Kreise mit dem Radius, welcher der kleinste ist unter den Radien der Convergenzkreise der Partialfunctionen, convergent.

Diese Bemerkung ist nicht ohne Nutzen in Fällen, wo die Convergenzbedingung einer Partialfunction $f_{n,i}(x)$ leichter wird für die Untersuchung, als die der Hauptfunction $f(x)$ selbst. Hat man aber die Convergenz von $f_{n,i}(x)$ ermittelt, so lässt sich dann häufig aus der Art, wie i in der Convergenzbedingung auftritt, sehr leicht schliessen, für welches i der Ausdruck für den Radius ein Minimum wird; und dieses wird dann den Radius des Convergenzkreises der Hauptfunction liefern. Ja man erspart sogar in vielen Fällen auch die Untersuchung dieses Minimums, da der Ausdruck

$$\lim \frac{a_{qn+i}}{a_{(q-1)n+i}} \cdot x^n,$$

welcher behufs der Convergenz der Reihe für die i^{te} Partialfunction zu untersuchen ist, oft durch eine geschickte Wahl von n von i unabhängig gemacht werden kann, wenn er es noch nicht überhaupt war. In solchem Falle haben dann natürlich alle Partialfunctionen gleichen Convergenzkreis, und somit auch die Hauptfunction.

Untersuchen wir in unserem Falle den Convergenzkreis einer i^{ten} Partialfunction m^{ter} Classe unserer Function, indem wir also in

$$a_p = \frac{\prod\limits_{0}^{p-2}{}^{\lambda} (p - \lambda m)}{p!}$$

die für $f_{m,i}(x)$ einzig mögliche Form

$$p = q \cdot m + i$$

einsetzen und den Ausdruck für zwei aufeinanderfolgende Werthe von p, nämlich entsprechend q und $(q - 1)$ bilden, wobei wir im ersten Falle den Bruch in zwei Factoren zerlegen:

$$a_{qm+i} = \frac{\prod\limits_{0}^{qm+i-2}{}_{\lambda} \left((q-\lambda)m+i\right)}{(qm+i)!} = \mathsf{P}_1 \cdot \mathsf{P}_2, \text{ wobei}$$

$$\mathsf{P}_1 = \Big(\frac{\overset{*}{[qm+i]}[(q-1)m+i][(q-2)m+i]\cdots i}{1\cdot 2\cdots q} \times$$
$$\times \frac{[i-m][i-2m]\cdots[i-\{(q-1)(m-1)+i-2\}m]}{(q+1)(q+2)\cdots(q-1)m+i}\Big);$$

$$\mathsf{P}_2 = \Big(\frac{[i-\{(q-1)(m-1)+i-1\}m]}{[(q-1)m+i+1]}\frac{[i-\{(q-1)(m-1)+i\}m]}{[(q-1)m+i+2]} \times$$
$$\frac{[i-\{(q-1)(m-1)+i+1\}m]}{[(q-1)m+i+3]}\cdots\frac{[i-\{(q-1)(m-1)+i+m-3\}m]}{[qm+i-1]}\frac{1}{qm+i}\Big)$$

$$a_{(q-1)m+i} = \frac{\prod\limits_{0}^{(q-1)m+i-2}{}_{\lambda} \left((q-1-\lambda)m+i\right)}{((q-1)m+i)!}$$
$$= \Big(\frac{[(q-1)m+i][(q-2)m+i]\cdots i}{1\cdot 2\cdots q} \times$$
$$\times \frac{[i-m][i-2m]\cdots[i-\{(q-1)(m-1)+i-2\}m]}{(q+1)(q+2)\cdots[(q-1)m+i-1][(q-1)m+i]}\Big),$$

so springen folgende Bemerkungen sofort in's Auge:

1) Das erste Glied $[qm + i]$ im Zähler des ersten Factors von a_{qm+i} hebt sich gegen denselben Ausdruck im Nenner des zweiten Factors auf.

2) Der ganze noch übrig bleibende erste Factor P_1 stellt genau den Ausdruck von $a_{(q-1)m+i}$ dar.

3) Der zweite Factor P_2 besteht aus einem Bruche, der eine *constante* Anzahl, nämlich $(m - 1)$, Factoren, in

welchen die Grösse q linear enthalten ist, sowohl im Zähler als im Nenner, und

4) Die allgemeine Form dieser einzelnen Brüche des zweiten Factors

$$\frac{i-[(q-1)(m-1)+i+\mu]\,m}{i+(q-1)\,m+\mu+2}$$
$$=\frac{m(m-1)-m(\mu+i)+i-m(m-1)\,q}{-m+i+\mu+2+mq};$$
$$\mu=-1,0,1,\cdots,(m-3)$$

sagt unmittelbar aus, dass für $m > 1$ und $q > 2$ kein ganzzahliges q möglich ist, für welches in einem dieser Brüche der Zähler oder Nenner Null werden könnte, da die Ausdrücke

$$\frac{-m(\mu+i)+i}{m(m-1)} \quad \text{und} \quad \frac{i+\mu+2}{m}$$

für die Werthe

$$i= \quad 0,1,2,\cdots,m-1$$
$$\mu=-1,0,1,\cdots,m-3$$

immer kleiner als 2 bleiben; und endlich noch

5) Dass sowohl im Zähler als auch im Nenner der Coefficient von q unabhängig von i erscheint.

Schreibt man daher den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe in der Form

$$\frac{a_{qm+i}}{a_{(q-1)m+i}}=\prod_{0}^{m-2}{}^{\mu}\left\{\frac{\frac{(m-i)(m-1)-m(\mu-1)}{q}-m(m-1)}{\frac{-m+i+\mu+1}{q}+m}\right\}$$

und setzt $q=\infty$, so erhält man ohne Weiteres den von i unabhängigen Grenzwerth

$$\lim_{q=\infty}\frac{a_{qm+i}}{a_{(q-1)m+i}}\,x^m=(1-m)^{m-1}x^m.$$

Die Convergenzbedingung für *alle* i^{ten} $(i=0,1,2,\cdots,m-1)$ Partialfunctionen m^{ter} Classe ist somit

$$\text{Abs. } x^m(1-m)^{m-1}<1,$$

oder

$$\text{Mod. } x<\text{mod. }(1-m)^{\frac{1-m}{m}},$$

welche nach dem Obigen auch für die Hauptreihe gilt.

Um nun die inverse Function zu der ersten Partialfunction einer beliebigen n^{ten} Classe unserer Function zu erhalten, brauchen wir nur die Werthe von

$$a_{qn+1}$$

für die obige Formel (Ω_1) zu benutzen. Setzt man nämlich in

$$a_p = \frac{\prod_0^{p-2}{}^{\lambda} (p - \lambda m)}{p!} = \frac{m^{p-1}}{p} \binom{\frac{p}{m}}{p-1}$$

$p = qn + 1$, und trägt diese Werthe in (Ω_1) ein, so bekommt man für $q = 0$ und $a_1 = 1$ unmittelbar $b_1 = 1$; dann für $q = 1$

$$b_{n+1} = - a_{n+1} = - \frac{m^n}{n+1} \binom{\frac{n+1}{m}}{n};$$

ferner für $q = 2$

$$b_{2n+1} = (n + 1)\, a_{n+1}^2 - a_{2n+1},$$

d. h.

$$b_{2n+1} = m^{2n} \left\{ \frac{\binom{\frac{n+1}{m}}{n}}{n+1} - \frac{\binom{\frac{2n+1}{m}}{2n}}{2n+1} \right\} \text{ etc.}$$

Uns interessirt hierbei insbesondere der specielle Fall $n = 1$, also die inverse Function der gegebenen Hauptfunction selbst. Es ergeben sich in diesem Falle die einfacheren Ausdrücke

$$b_1 = 1; \quad b_2 = m \binom{-\frac{1}{m}}{1}; \quad b_3 = \binom{-\frac{1}{m}}{2} m^2;$$

$$b_4 = \binom{-\frac{1}{m}}{3} m^3, \text{ etc.}$$

Aus den Eigenschaften der Facultäten und Binomialcoefficienten kann man leicht schliessen, dass allgemein

$$b_q = m^{q-1} \binom{-\frac{1}{m}}{q-1}$$

ist, so dass die inverse Function der ersten Partialfunction erster Classe von

$$y = \sum_0^\infty {}_p\, a_p x^p; \quad a_p = \frac{\prod_{\lambda=0}^{p-2} (p - \lambda m)}{p!} \quad \text{für } p > 2; \; a_1 = a_2 = 1$$

in der Form erscheint:

$$x = \sum_0^\infty {}_p \left\{ \frac{\prod_{\lambda=0}^{p-2} (1 - \lambda m)}{(p-1)!}\, y^p \right\} = \sum_1^\infty \binom{-\frac{1}{m}}{q-1} (ym)^{q-1}\, y,$$

welche Reihe für jeden Werth von y innerhalb des Kreises mit dem Radius mod. $\left(\frac{1}{m}\right)$ convergirt und also nach dem binomischen Lehrsatze auch so geschrieben werden darf:

$$x = y(1 + my)^{-\frac{1}{m}}.$$

Erhebt man diese letzte Gleichung zur m^{ten} Potenz, so erhält man

$$x^m = \frac{y^m}{1 + my},$$

oder eine nach y trinomische Gleichung

$$y^m - mx^m y - x^m = 0,$$

welche durch die Reihe $y = \sum_0^\infty {}_p\, a_p x^p$

$$a_p = \frac{\prod_{\lambda=0}^{p-2} (p - \lambda m)}{p!}; \quad p > 2 \text{ und } a_1 = a_2 = 1$$

für jeden Werth von x innerhalb des Kreises mit dem Radius

$$R = \text{mod.}\,(1 - m)^{\frac{1-m}{m}}$$

befriedigt wird.

Man sieht leicht, dass dieses Resultat mit der bekannten Darstellung der Wurzeln einer trinomischen Gleichung vom Grade m genau übereinstimmt. Bekanntlich liefert dieselbe Reihe zugleich [für $(r_m^h x)$] *sämmtliche* Wurzeln der trino-

mischen Gleichung, innerhalb desselben Kreises, innerhalb dessen keine zwei Wurzeln einander gleich sein können. (Vgl. Bemerkung von Gauss, Werke, Bd. III, Anzeige der Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen (Juli 1849) pag. 115; Abhandl. der Kgl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen, Bd. IV. Ferner die bald darauf von der philosophischen Facultät zu Göttingen preisgekrönte Arbeit von Westphal „Evolutio radicum aequationum algebraicum e ternis terminis constantium in series infinitas", 1850; dann die einem Programm des Nicolaigymnasiums zu Leipzig beigegebene Abhandlung von Gebhardt „Die Auflösung dreigliedriger algebraischer Gleichungen durch Reihen mit einer Tabelle etc." 1873; und endlich noch die Dissertation von Herrn v. Mangoldt „Ueber die Darstellung der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch unendliche Reihen.) Für unseren Zweck ist diese Lösung innerhalb des genannten Kreises vollkommen ausreichend, wie wir später sehen werden, so dass wir uns in gewissen Fällen sogar die besondere Untersuchung des Verhaltens auf der Peripherie dieses Kreises ersparen können.

B. *Inverse Functionen der circumplexen Functionen.*

Ist die allgemeine h^{te} circumplexe Function n^{ter} Classe

$$\overset{n,h}{y} = a_0 + a_1 r_n^h x + a_2 r_n^{2h} x^2 + \cdots + a_t r_n^{th} x^t + \cdots$$

gegeben, in welcher a_1 von Null verschieden ist, so kann man das absolute Glied nach der linken Seite herüberbringen und in der Entwickelung von $[\overset{n,h}{y} - a_0]^{-q}$ nach steigenden Potenzen von x wird man die Formel (μ) benutzen können, indem man darin die Werthe $i = 1$, $n = 1$ und $r_n^h x$ anstatt x setzen wird. Man wird auf diese Weise erhalten:

$$(\mu') \quad \frac{1}{[\overset{n,h}{y} - a_0]^q} = a_1^{-q} r_n^{-qh} x^{-q} + \binom{-q}{1} a_1^{-q-1} a_2 r_n^{(1-q)h} x^{1-q} + \left. \begin{matrix} + \binom{-q}{2} a_1^{-q-2} a_2^2 \\ + \binom{-q}{1} a_1^{-q-1} a_3 \end{matrix} \right| r_n^{(2-q)h} x^{2-q} + \cdots$$

(Weil auch hier das Gewicht eines jeden Coefficienten genau, wie oben, mit dem entsprechenden Exponenten von x übereinstimmt, so würde man zum selben Resultate gekommen sein, wenn man nicht $r_n^h x$ anstatt x gesetzt, sondern eine analoge Substitution für die Coefficienten, nämlich $r_n^{\lambda h} a_\lambda$ anstatt a_λ sowohl in der ursprünglich gegebenen Function als auch in der $(-q)^{\text{ten}}$ Potenz derselben angewendet hätte. Dass in den Operationen der Substitutionaldifferentiation dadurch keine Störung eintreten würde, ist selbstverständlich. Man könnte schliesslich diese Entwickelung der Coefficienten mit Hilfe der Substitutionaldifferentiation auch dadurch bewirken, dass man für x, falls die Reihe auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius Eins noch convergirt, den speciellen Werth $x = r_n^h$ gesetzt hätte.)

Um jetzt die Coefficienten b in der Potenzreihe der entsprechenden inversen Function

$$x = 1 + b_1(\overset{n,h}{y} - a_0) + b_2(\overset{n,h}{y} - a_0)^2 + \cdots$$

zu erhalten, muss man wiederum der Reihe nach für q die Werthe $q = 1, 2, 3, \cdots$ setzen und die dadurch entstehenden Coefficienten von $\frac{1}{x}$ nach Vorschrift mit $\frac{1}{q}$ multipliciren. (Diesmal ist keine Beschränkung vorhanden, wie es für den speciellen Werth $n = 1$, $i = 1$ aus der obigen Bedingungscongruenz auch direct folgt. Natürlich darf aber a_1 nicht Null sein.) Mithin ist

$$x = \frac{a_1}{a_1} r_n^{-h} (\overset{n,h}{y} - a_0) - 2 \frac{a_2}{a_1^3} r_n^{-h} \frac{(\overset{n,h}{y} - a_0)^2}{2}$$
$$+ 3 \frac{(2a_2^2 - a_1 a_3)}{a_1^5} r_n^{-h} \frac{(\overset{n,h}{y} - a_0)^3}{3} - \cdots$$

also

$$r_n^h x = \frac{a_1}{a_1}(\overset{n,h}{y} - a_0) - \frac{a_2}{a_1^3}(\overset{n,h}{y} - a_0)^2 + \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}(\overset{n,h}{y} - a_0)^3$$
$$- \frac{5a_2(a_2^2 - a_1 a_3) + a_1^2 a_4}{a_1^7}(\overset{n,h}{y} - a_0)^4 + \cdots$$

Aus den Relationen zwischen den Summen gleichhoher Potenzen der Cofunctionen und ihren Coordinirten ergeben sich dann mehrere merkwürdige Eigenschaften und Beziehungen, von denen wir bei einer andern Gelegenheit Gebrauch machen werden.

§ 7.

Einige weitere Eigenschaften der Substitutional-Differentiale höherer Ordnung von homogenen isobarischen Functionen.

a) Ist $(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f})^m$ eine homogene Function m^{ten} Grades der Variabelen $u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f}$, so ist definitionsgemäss im Allgemeinen (für $m > 1$)

$$S_n d\left[(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f})^m\right] = s_n d\left[(u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f})^m\right]$$
$$= (u_{\mathfrak{l}_1}, u_{\mathfrak{l}_2}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f}; \quad u_{\mathfrak{l}_1+n}, u_{\mathfrak{l}_2+n}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f+n})^m$$

wiederum eine homogene Function von demselben m^{ten} Grade von $2f$ Variabeln, worunter die f ursprünglichen auftreten können und ausserdem auch noch f andere, welche aus den ursprünglichen durch eine auf die Indices ausgeübte lineare Substitution $\begin{bmatrix} z+n \\ z \end{bmatrix}$ erhalten werden. Dabei treten diese f *letztern nur linear* auf. Ebenso ist ferner $S_n^2 d$, oder $s_n^2 d$, aus jener homogenen Function m^{ten} Grades wiederum eine homogene Function von demselben m^{ten} Grade im Allgemeinen von $3f$ Variabeln, worunter die frühern $2f$ und ausser ihnen noch f solche, welche aus den f ursprünglichen durch die Substitution $\begin{bmatrix} z+2n \\ z \end{bmatrix}$ erhalten werden und wobei diese *letztern* $u_{\mathfrak{l}_1+2n}, u_{\mathfrak{l}_2+2n}, \cdots, u_{\mathfrak{l}_f+2n}$ *nur linear erscheinen* können. Und so ist auch (im Allgemeinen*)) überhaupt $s_n^t d$ sowohl, als auch $S_n^t d$ eine homogene Function m^{ter} Dimension von den $(t+1)f$ Variabeln $u_{\mathfrak{l}_\varphi+\tau n}$, wobei φ und τ alle Werthe annehmen können

$$\varphi = 1, 2, 3, \cdots, f;$$
$$\tau = 0, 1, 2, \cdots, t.$$

Dabei können die neu hinzugetretenen f Grössen

$$u_{\mathfrak{l}_\varphi+tn}, \qquad \varphi = 1, 2, \cdots, f$$

nur linear auftreten.

---

*) In speciellen Fällen könnten verschiedene darunter, ja sogar alle gar nicht auftreten, wie z. B. für die Operation $s_n^t d$, wenn $t > m$ ist. Vergl. (1) und (2) am Schlusse von § 4.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist oben bereits direct aus der Definition gefolgert worden.

Uns wird im Folgenden ein specieller Fall interessiren, wobei $f = n - 1$ und die Indices $\mathfrak{l}_\varphi = \varphi$, d. h. $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_{n-1}$ beziehungsweise die Werthe $1, 2, \cdots, n-1$ haben, wobei ferner m einen der Werthe $1, 2, \cdots, n$ besitzt, während die ursprüngliche Function ausser den Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ auch diejenigen enthalten soll, welche aus jenen durch eine auf die Indices ausgeübte Substitution $\begin{bmatrix} z+pn \\ z \end{bmatrix}$ erhalten werden können, jedoch so, dass die Glieder ausschliesslich vom Gewichte $(q \cdot n)$ sein sollen; wir bezeichnen eine solche mit

$$(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1};\ s_n)^m_{\frac{qn}{m}}.$$

Denkt man sich eine Reihe

$$\sum_0^\infty {}_t\, S^t_n\, d\, (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1};\ s_n)^m_{\frac{qn}{m}}$$

entwickelt und nach steigendem Gewichte geordnet, so wird jedenfalls diese Anordnung mit der Anordnung nach steigendem t zusammenfallen, weil das Gewicht, wie wir oben gesehen haben, um n steigt, während t um eins zunimmt, so dass das Glied

$$S^t_n\, d\, (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1};\ s_n)^m_{\frac{qn}{m}}$$

von m^{ter} Dimension und vom Gewichte

$$G = (q + t)\, n$$

sein wird.

Auf Grund dieser oben bewiesenen Eigenschaft können wir nun einige für die Folge wichtige Bemerkungen machen.

b) Der grösste Werth von j in u_j, welches in

$$S^t_n\, d\, (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1};\ s_n)^m_{\frac{qn}{m}}$$

vorkommt, ist, solange $j > 1$ bleibt, $(q + t)n - m + 1$; und zwar kommt ein solches $u_{(q+t)n-m+1}$ in diesem Gliede nur linear vor.

Denn, da die Dimension aller Glieder constant gleich m ist und da andrerseits die übrigen $m - 1$ Factoren keinen kleinern Index als *Eins* haben können, so wäre für

$$j > (q + t)n - m + 1$$

schon das kleinstmögliche Gewicht G' von $u_1^{m-1} \cdot u_j$ d. h.

$$G' = m - 1 + j > (q + t)n,$$

geschweige erst, wenn einige der Indices andrer Factoren noch grösser als die Einheit wären; also kann nur

$$j \leq (q + t)n - m + 1$$

stattfinden. Ist aber speciell

$$j = (q + t)n - m + 1$$

und käme u_j in dem betreffenden Gliede etwa in der μ^{ten} Potenz vor, so könnten die $m - \mu$ noch übrig bleibenden Factoren keine kleinern Indices als die Einheit haben, und schon $u_1^{m-\mu} u_j^{\mu}$ hätte das Gewicht

$$m + (j - 1)\mu = m + \mu[(q + t)n - m] = \mu(q + t)n - (\mu - 1)m$$

und dieses müsste den Werth $(q + t)n$ haben. Aus der Gleichung

$$[(q + t)n - m](\mu - 1) = 0$$

folgt aber entweder $\mu = 1$, oder $(q + t)n - m = 0$, also, in letzterem Falle, $j = 1$; wie behauptet wurde.

c) Ist nun $m = n$, so wird das erste Glied (d. h. für $t = 0$), welches von der n^{ten} Dimension und vom Gewichte qn ist, jedenfalls die Potenz u_q^n enthalten und es wird noch von den speciellen Werthen von n und q abhängen, ob noch darin ausserdem andere Grössen u vorkommen können. So z. B. würden über die Existenz von $u_\lambda^{\lambda'} \cdot u_\mu^{\mu'}$ die Bedingungsgleichungen

$$\lambda' + \mu' = n,$$
$$\lambda \cdot \lambda' + \mu \cdot \mu' = qn$$

zu entscheiden haben. Jedenfalls ist aber klar, dass darin kein u_j enthalten sein kann, wenn

$$j > (q - 1)n + 1$$

ist und, dass das u mit dem grösstmöglichen j, nämlich

$$u_{(q-1)n+1}$$

nur linear erscheinen kann, und zwar in der Form

$$u_{(q-1)n+1}\, u_1^{n-1}$$

und auch das nur, wenn

$$q > 1$$

ist.

Das nächste Glied ($t = 1$) ist von n^{ter} Dimension und vom Gewichte $(q + 1)n$; und es kann daher kein u mit einem grössern Index als $qn + 1$ enthalten und u_{qn+1} kann darin nur noch linear vorkommen, nämlich in der Form

$$u_{qn+1}\, u_1^{n-1}\,.$$

Das dritte Glied ($t = 2$) ist von n^{ter} Dimension und vom Gewichte $(q + 2)\, n$ und enthält kein u mit einem grössern Index als $(q + 1)\, n + 1$; und ein u mit diesem grössten Index, $u_{(q+1)n+1}$, kommt darin nur linear in der Form $u_{(q+1)\, n+1}\, u_1^{n-1}$ vor; etc.

Und allgemein ist das $(t + 1)^{\text{te}}$ Glied ($t = t$) von n^{ter} Dimension und vom Gewichte $(q + t)n$ und enthält kein Glied mit einem grössern Index als $(q + t - 1)\, n + 1$ und das u mit diesem grössten Index, $u_{(q+t-1)\, n+1}$, kommt in diesem Gliede nur linear in der Form

$$u_{(q+t-1)\, n+1} \cdot u_1^{n-1}$$

vor.

d) Ist $m = n - 1$, so wird das erste Glied ($t = 0$), dessen Gewicht qn und dessen Dimension $n - 1$ sein muss, jedenfalls $u_q^{n-q-1}\, u_{q+1}^q$ enthalten. Der grösstmögliche Index von u wird darin $j = (q - 1)\, n + 2$ sein; aber die zwei mit den grössten Indices behafteten u, nämlich $u_{(q-1)n+1}$ sowohl, als auch $u_{(q-1)\, n+2}$ können, sofern $q > 1$ und $n > 1$ sind, nur linear und zwar in der Form

$$u_{(q-1)\, n+1}\, u_2\, u_1^{n-3} \quad \text{resp.} \quad u_{(q-1)\, n+2}\, u_1^{n-2}$$

darin erscheinen. (Es kann nämlich ein Glied von der Form $u_{(q-1)\, n+1}\, u_\mu^{n-2}$ überhaupt nur für $n = 3$ noch existiren, weil die Bedingungsgleichung

$$(q-1)n + 1 + \mu(n-2) = qn, \quad \text{oder} \quad n = 2 + \frac{1}{\mu - 1}$$

sonst n als ganze Zahl nicht zulässt; aber auch für diesen Fall fällt dieses mit der angegebenen Form

$$u_{(q-1)\, n+1}\, u_2\, u_1^{n-3}$$

zusammen.)

Das zweite Glied ($t = 1$) hat dieselbe Dimension $n - 1$ und das Gewicht $(q + 1)n$ und besitzt, ausser den u mit kleinern Indices als qn, noch die mit den zwei grösstmöglichen Indices $qn + 1$ und $qn + 2$ und zwar die beiden letztern nur linear in der Form

$$u_{qn+1} u_2 u_1^{n-3}, \quad u_{qn+2} u_1^{n-2},$$

etc. Und allgemein ist das $(t + 1)^{te}$ Glied (für $t = t$) von der Dimension $n - 1$ und vom Gewichte $(q + t)n$ und enthält ausser den u, deren Indices kleiner als $(q + t - 1)n$ sind, welche zu höhern Potenzen vorkommen können, nur noch die zwei mit den grösstmöglichen Indices

$$u_{(q+t-1)n+1}, \quad u_{(q+t-1)n+2},$$

die nur linear in der Form

$$u_{(q+t-1)n+1} u_2 u_1^{n-3} \quad \text{resp.} \quad u_{(q+t-1)n+2} u_1^{n-2}$$

auftreten. Denn setzt man für das erste Glied die allgemeine Form

$$u_{(q+t-1)n+1} u_\mu^\lambda u_\nu^{n-\lambda-2},$$

so folgt aus

$$G = (q+t-1)n - n + 1 + \lambda\mu + \nu(n - \lambda - 2) = (q+t)n$$

die Bedingungsgleichung

$$\nu = \frac{n - \lambda\mu - 1}{n - \lambda - 2},$$

in welcher λ, μ, ν und n ganze positive Zahlen sein sollen. Diese Bedingung kann für ν offenbar nur dann erfüllt werden, wenn $\lambda\mu + 1 \leqq \lambda + 2$, oder $\lambda \leqq \frac{1}{\mu - 1}$ ist, woraus die eindeutigen Werthe

$$\lambda = 1, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1$$

sich ergeben. Für das zweite Glied $u_{(k+t-1)n+2} u_1^{n-2}$ ist schon oben (in (1)) gezeigt worden, dass die angegebene Form die einzig mögliche ist.

e) Ist $m = n - 2$, so wird das erste Glied ($t = 0$) von der Dimension $n - 2$ und vom Gewichte qn und enthält ausser den u mit kleinern Indices, welche zu höhern Potenzen vorkommen können, noch die drei u mit den höchsten Indices $(q - 1)n + 1$, $(q - 1)n + 2$, $(q - 1)n + 3$ und zwar letztere nur linear in der Form

$$\left.\begin{array}{l} u_{(q-1)n+1}\, u_3\, u_1^{n-4} \\ u_{(q-1)n+1}\, u_2^2\, u_1^{n-5} \end{array}\right\}; \quad u_{(q-1)n+2}\, u_2\, u_1^{n-4}; \quad u_{(q-1)n+3}\, u_1^{n-3}.$$

Das zweite Glied ($t = 1$) ist von der Dimension $n - 2$ und vom Gewichte $(q + 1)n$ und enthält ausser den u mit kleinern Indices, möglicherweise zu höhern Potenzen, nur noch die drei u mit den höchstmöglichen Indices $qn + 1$, $qn + 2$, $qn + 3$, und zwar letztere nur linear in der Form

$$\left.\begin{array}{l} u_{qn+1}\, u_3\, u_1^{n-4} \\ u_{qn+1}\, u_2^2\, u_1^{n-5} \end{array}\right\}; \quad u_{qn+2}\, u_2\, u_1^{n-4}; \quad u_{qn+3}\, u_1^{n-3},$$

etc. Das $(t + 1)^{\text{te}}$ Glied (für $t = t$) ist von der Dimension $n - 2$ und vom Gewichte $(q + t)n$ und enthält auser den u mit kleinern Indices zu höhern Potenzen noch die mit den drei grösstmöglichen Indices

$$(q+t-1)n+1, \quad (q+t-1)n+2, \quad (q+t-1)n+3$$

und zwar die drei letztern nur noch linear in der Form

$$u_{(q+t-1)n+1}\, u_1^{n-4}(u_2^2 + u_3 u_1); \; u_{(q+t-1)n+2}\, u_1^{n-4}(u_2); \; u_{(q+t-1)n+3}\, u_1^{n-3}.$$

Durch diesen systematischen Fortgang wird man zu der Vermuthung veranlasst, es müsste ganz analog so auch fernerhin die Sache sich verhalten.

f) In der That ist allgemein für $m = n - k$ die Dimension für alle Glieder constant $n - k$, während das Gewicht im ersten Gliede (für $t = 0$) $G = qn$, und dieses Glied enthält daher, ausser den u mit Indices, welche kleiner sind als $(q + t - 1)n$, noch folgende $(k + 1)$ mit den grösstmöglichen Indices:

$$u_{(q-1)n+1}; \quad u_{(q-1)n+2}; \quad \cdots; \quad u_{(q-1)n+k+1}$$

und zwar letztere nur linear.

Und so ist *allgemein* das $(t + 1)^{\text{te}}$ Glied (für $t = t$) vom Gewichte $(q + t)n$ und enthält, ausser den u mit kleinern Indices, noch die $(k + 1)$ mit den grösstmöglichen Indices:

$$u_{(q+t-1)n+1}, \quad u_{(q+t-1)n+2}, \quad \cdots, \quad u_{(q+t-1)n+k+1}$$

und zwar die $k + 1$ letztern nur linear in der Form

$$u_{(q+t-1)n+k'} \cdot \left(\sum u_2^{\lambda_1} u_3^{\lambda_2} \cdots u_{k+1}^{\lambda_k} u_1^{n-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_k-k-1}\right),$$

wobei sich das Summenzeichen auf alle möglichen Werthe von den λ in der Bedingungsgleichung

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + k\lambda_k = k + 1 - k'$$

bezieht, in welcher k' eine der ganzen positiven Zahlen von 1 bis $k+1$, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe nicht grösser sein darf als

$$n - k - 1.$$

Denn ein Glied $u^{\mu}_{(q+t-1)n+k'} \cdot u_1^{n-k-\mu}$ würde das Gewicht

$$G_1 = \mu(q+t)n - (\mu-1)n + \mu(k'-1) - k$$

haben; weil aber hier

$$G_1 = (q+t)n$$

sein muss, so bekäme man die Bedingungsgleichung

$$\mu[(q+t-1)n + k' - 1] \leqq (q+t-1)n + k,$$

woraus

$$(\alpha) \qquad \mu \leqq \frac{(q+t-1)n + k}{(q+t-1)n + k' - 1}$$

folgen würde, was man auch in der Form

$$(\beta) \qquad \mu \leqq 1 + \frac{k+1-k'}{(q+t-1)n + k' - 1}$$

schreiben kann. Nun ist $(q+t-1) \geqq 0$ und $k' \geqq 1$, so dass, wenn wir den speciellen Fall $q+t-1=0$ vorläufig noch ausgeschlossen lassen, der Nenner des Bruches eine positive ganze Zahl ist und zwar grösser als n, oder mindestens gleich n; weil aber $k+1 \geqq k'$ ist, so ist der Zähler eine ganze positive Zahl, welche kleiner, oder höchstens gleich k ist. Da aber jedenfalls $n - k = m > 0$ ist, so ist unter allen Umständen in dem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so dass für die ganze positive Zahl μ die Bedingung

$$0 < \mu < 2,$$

also $\mu = 1$ folgt, was zu beweisen war.

Für den noch unberücksichtigt gebliebenen Fall

$$(q+t-1) = 0,$$

welcher für positive und ganzzahlige q und t nur eintritt

entweder für $q = 0$ und $t = 1$,
oder „ $q = 1$ „ $t = 0$,

verwandelt sich die Formel (α) in

$$(\alpha') \qquad \mu \leqq \frac{k}{k'-1}; \qquad k' = 1, 2, 3, \cdots k+1.$$

Aus dieser von n unabhängigen Bedingung für μ ergeben sich einige für beliebige n geltende Gesetze:

1) Es kann kein u_j darin vorkommen, wenn $j > k + 1$ ist; denn es wäre dann $k' - 1 > k$, also μ durch keine ganze, positive und von Null verschiedene Zahl zu befriedigen.

2) Die Grösse u_{k+1} ist darin nur *linear* enthalten; da aus $\mu \leqq \frac{k}{k}$ sich offenbar eindeutig $\mu = 1$ ergiebt.

3) Die Grösse u_k kommt für $k > 2$ ebenfalls nur *linear* vor, und nur für $k = 2$ erscheint u_2^2; wie aus $\mu \leqq 1 + \frac{1}{k-1}$ (wenn der Fall $k' = 1$, der wie weiter sich ergeben wird den eindeutigen Werth $\mu = n$ liefert, vorläufig noch ausgeschlossen wird) zu ersehen ist.

4) Allgemein kommt $u_{k-\mathfrak{l}}$ für $k > 2(\mathfrak{l}+1)$ nur linear vor, wie aus

$$(\gamma) \qquad \mu \leqq 1 + \frac{\mathfrak{l}+1)}{k-(\mathfrak{l}+1)}$$

direct folgt.

5) Für $k' = 1$ hätte man $\mu \leqq \frac{k}{0}$, woraus nichts für μ bestimmt werden könnte; indess lässt sich für u_1 die Bestimmung direct treffen. Aus $G(u_1^\mu u_\beta^{n-\mu-k}) = n$ ergiebt sich nämlich

$$(\mu - n)(1 - \beta) = k\beta,$$

woraus zunächst für $k = 0$, entweder $\mu = n$, oder $\beta = 1$ und umgekehrt für $\mu = n$, oder $\beta = 1$ nothwendig $k = 0$ sich ergiebt, so dass für $k = 0$ und nur für $k = 0$ u_1^n vorkommen kann. Dass aber für ein von Null verschiedenes k der Maximalwerth des Exponenten von u_1 nicht $n - k - 1$ überschreiten kann ist schon deshalb klar, da die Dimension von $u_1^{n-k-1+\mathfrak{l}}$ schon um $\mathfrak{l} - 1$ zu gross wäre. Die höchste Potenz von u_1

kann somit (für $k = k$) nur in der Form $u_1^{n-k-1} u_{k+1}$ erscheinen (worin übrigens für $k = 0$ der Fall u_1^n enthalten ist).

6) Bezeichnet man den Maximalwerth von μ für $k' = k - \mathfrak{l}$ mit M, so folgt aus (γ) $\mathsf{M}_1 = E\left(\frac{k}{k-(\mathfrak{l}+1)}\right)$ für $u_{k-\mathfrak{l}}$.

Da nun aber ausser dem Gewichte auch die Dimension $n - k$ vorgeschrieben ist, so existirt für μ noch ein Maximalwerth $\mathsf{M}_2 = n - k$, der nicht überschritten werden darf; bezeichnet man daher die kleinere der beiden Zahlen M_1 und M_2 mit M, so ist der wahre Maximalwerth von μ für ein beliebiges k die Grösse M.

7) Für u_2 wären also die Möglichkeiten $\mu = 1, 2, \cdots, k$; indess ist der Werth $\mu = k - 1$ speciell auszuschliessen, weil das Gewicht von $u_2^{k-1} \cdot u_1^{n-k+1}$, nämlich $n + k - 1$ für $k > 1$ schon grösser als n wäre, und um so mehr das Gewicht von etwa $u_2^{k-1} \cdot u_j^{n-k+1}$ für $j > 1$, da $k < n + 1$ folglich $n - k + 1 > 1$ und somit $j(n - k + 1) > n - k + 1$ ist.

8) Für u_1 existirt noch ein *Maximalwerth* von μ:

$$\mu = n - 2k.$$

Denn angenommen, es käme in einem Gliede $u_1^{n-2k-\mathfrak{l}}$ vor, so könnten die noch übrig bleibenden $k + \mathfrak{l}$ Factoren keine kleinern Indices als 2 haben; aber selbst $u_1^{n-2k-\mathfrak{l}}\, u_2^{k+\mathfrak{l}}$ hätte das Gewicht $G = n + \mathfrak{l} > n$ für $\mathfrak{l} > 0$.

Aus dem Auseinandergesetzten bekommen wir für

$$(q + t - 1) = 0$$

folgendes Gesetz:

u_1 kann nur zu den k verschiedenen Potenzen

$$u_1^{n-2k},\ u_1^{n-2k+1},\ u_1^{n-2k+2}, \cdots, u_1^{n-k-1} \text{ vorkommen;}$$

u_2 kann nur zu den $k - 1$ verschiedenen Potenzen

$$u_2^1,\ u_2^2, \cdots, u_2^{k-2},\ u_2^{k-1} \text{ vorkommen; (vgl. (7))}$$

u_3 kann nur zu den $E\left(\frac{k}{2}\right)$ verschiedenen Potenzen

$$u_3^1,\ u_3^2, \cdots, u_3^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \text{ vorkommen;}$$

u_4 kann nur zu den $E\left(\frac{k}{3}\right)$ verschiedenen Potenzen

$$\overset{1}{u_4},\ \overset{2}{u_4},\ \cdots,\ \overset{E\left(\frac{k}{3}\right)}{u_4} \quad \text{vorkommen;}$$

$\vdots$

$u_{k'}$ kann nur zu den $E\left(\frac{k}{k'-1}\right)$ verschiedenen Potenzen

$$\overset{1}{u_{k'}},\ \overset{2}{u_{k'}},\ \cdots,\ \overset{E\left(\frac{k}{k'-1}\right)}{u_{k'}} \quad \text{vorkommen;}$$

$\vdots$

$u_{E\left(\frac{k+2}{2}\right)}$ kann nur zu den 2 verschiedenen Potenzen

$$u^1_{E\left(\frac{k+2}{2}\right)},\ u^2_{E\left(\frac{k+2}{2}\right)} \quad \text{vorkommen.}$$

Alle u_j, wobei $j \geqq E\left(\frac{k+4}{2}\right)$, kommen nur *linear* vor; und endlich kommt ein u_j, wobei $j > k+1$, gar nicht vor.

Aus folgender Tabelle für $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ und k wird man noch manches Gesetz, welches für die praktische Entwickelung der aufeinander folgenden Werthe nützlich werden kann, ersehen können, wie z. B. dass irgend ein constanter Werth von $k' > 1$ für $k' - 1$ aufeinander folgende Werthe von k dieselben Werthe von μ liefert; etc.

Für $(q+t-1) > 0$ sind die obigen Erörterungen für unsern vorläufigen Zweck vollkommen ausreichend.

Natürlicherweise konnte man alle diese Bedingungen auch aus den durch das Bildungsgesetz von $S^t d$ entspringenden zwei Bedingungsgleichungen für Gewicht und Dimension:

$$1) \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + (k+1)\lambda_{k+1} = n,$$

$$2) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_{k+1} = n - k,$$

welche in der Theorie der binären Formen bekanntlich eine grosse Rolle spielen, und aus denen

$$3) \qquad \lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots + k\lambda_{k+1} = n$$

folgt, auch entnehmen.

Auch für den allgemeinen Fall

$$q + t - 1 > 0, \quad \text{oder} \quad p = q + t > 1$$

kann man sämmtliche entsprechende Eigenschaften direct aus den beiden Gleichungen

1) $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + (p'n + \varkappa)\lambda_{p'n+\varkappa} + \cdots = pn$

2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_{p'n+\varkappa} + \cdots = n - k,$

aus welchen sich durch Subtraction noch

3) $\lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots + (p'n + \varkappa - 1)\lambda_{p'n+\varkappa} + \cdots = (p-1)n + k$

ergiebt, herleiten. Offenbar haben alle λ für ein gewisses Werthsystem q, t, k eine constante Summe, und somit nimmt irgend ein Glied den grössten Werth an, wenn alle übrigen den kleinstmöglichen d. h. (weil sie positiv sein sollen) Null annehmen; und dann ergiebt sich aus 3)

$$\text{Max.}\,(p'n + \varkappa - 1)\,\lambda_{p'n+\varkappa} = (p-1)\,n + k\,,$$

oder

$$\text{Max.}\,(p'n + \varkappa - 1) = \frac{(p-1)\,n + k}{\lambda_{p'n+\varkappa}},$$

und weil alle λ ganzzahlig sein sollen, so nimmt dieser Coefficient eines beliebigen $\lambda_{p'n+\varkappa}$ den grösstmöglichen Werth für $\lambda_{p'n+\varkappa} = 1$ an; dann ist aber

$$\text{Max.}\,(p'n + \varkappa - 1) = (p-1)\,n + k\,,$$

also ist

$$p'n + \varkappa - 1 \leqq (p-1)\,n + k\,,$$

oder

$$\text{I.} \quad p'n + \varkappa \leqq (q + t - 1)\,n + k + 1\,,$$

und

$$\text{II.} \quad \text{Max.}\,(\varkappa) = (p - p' - 1)\,n + k + 1\,.$$

Daraus folgt, dass für den grössten Werth von p':

$$p' = p - 1\,,$$

der Maximalwerth von $\varkappa$, unabhängig von q, t, n, niemals den Werth $k + 1$ überschreiten kann. Also

(a) *für keinen Werth von $p = q + t$ kann ein $u_{(p-1)n+j}$ vorkommen, wenn $j > k + 1$ ist.*

Dann folgt aus 2) einerseits

$$\text{Max.}\,(\lambda_{p'n+\varkappa}) = n - k\,; \quad (p',\ \varkappa \text{ beliebig})$$

und andrerseits aus 1)

$$\text{Max.}\,(\lambda_{p'n+\varkappa}) = \frac{pn}{p'n + \varkappa} = 1 + E\left(\frac{(p-p')\,n - \varkappa}{p'n + \varkappa}\right);$$

also:

(b) *es kann kein λ den kleinern der beiden Werthe*

$$n - k\,; \quad E\left(\frac{pn}{p'n + \varkappa}\right)$$

überschreiten.

Für $(p-p')\,n-\varkappa < p'n+\varkappa$, d. h. $(p-2p')\,n < 2\varkappa$, (was für $p' \gtreqless \frac{p}{2}$ jedenfalls eintritt), ist

$$\text{Max.}\,(\lambda_{p'n+\varkappa}) = 1.$$

Also:

(c) *für irgend ein p kommen die Grössen*

$$u_{\frac{p}{2}n+\varkappa},\ u_{\left(\frac{p}{2}+1\right)n+\varkappa},\ \cdots,\ u_{(p-1)n+\varkappa};\ (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots, k+1)$$

nur linear vor.

Ist $p = 2p_1 + 1$, so kann noch

$$u^2_{p_1 n+\varkappa}$$

nur dann vorkommen, wenn $\varkappa = \frac{k+2}{2}$ ist, während alle übrigen u, deren Indices kleiner als $\frac{p}{2}n$ sind, (für beliebige $\varkappa$) auch zu höhern Potenzen als zur ersten vorkommen können.

Man kann also aussagen:

(b) für irgend ein Werthsystem von q, t, n, k sind die Grössen $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{(q+t-1)n+k+1}$, welche nur allein in

$$S^t_n d\left(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}; s_n\right)^{n-k}_{\frac{qn}{n-k}}$$

vorkommen können, in drei Gruppen einzutheilen:

I. $u_1, u_2, \cdots, u_{\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)n+\varkappa};\ (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots, k+1)$,

II. $u_{E\left(\frac{p}{2}\right)n},\ u_{E\left(\frac{p}{2}\right)n+1},\ \cdots,\ u_{E\left(\frac{p}{2}\right)n+k+1}$,

III. $u_{\left(E\left(\frac{p}{2}\right)+1\right)n+\varkappa},\ u_{\left(E\left(\frac{p}{2}\right)+2\right)n+\varkappa},\ \cdots,\ u_{(q+t-1)n+k+1}$,

von denen die erste (sobald nur $q+t>1$ ist) *immer* zu höheren Potenzen, die zweite *nur unter Umständen*, für gewisse Werthsysteme von q, t, k, n und die dritte für gar keine Werthe von q, t, k, n zu höhern als zur ersten Potenz vorkommen können.

Uns interessirt nun besonders die letzte Gruppe. Es ist sehr leicht einzusehen, dass nicht bloss keine höhere Potenz dieser Grössen, sondern auch kein Product irgend zweier derselben vorkommen kann. Denn setzt man $\lambda_{p'n+\varkappa} = 1$, wie es für die Grössen in III. nur allein möglich ist, wenn es nicht Null ist, so folgt aus den obigen Gleichungen, die

sich in folgende zwei

$$1') \quad \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+(p''n+\varkappa-1)\lambda_{p''n+\varkappa-1}+\cdots=(p-p')n-\varkappa$$

$$2') \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{p''n+\varkappa-1}+\cdots=n-k-1$$

verwandeln, aus denen sich durch Subtraction

$$3') \quad \lambda_2+2\lambda_3+\cdots+(p''n+\varkappa-2)\lambda_{p''n+\varkappa-1}+\cdots$$
$$\cdots=(p-p'-1)n+k+1-\varkappa,$$

ergiebt, dass

$$\text{Max.}(p''n+\varkappa-2)=(p-1)n+k+1-(p'n+\varkappa)$$

ist, und wenn man darin die Werthe, welche den Grössen III. entsprechen

$$p'n+\varkappa=(p-1)n+k+1;\ (p-1)n+k;\cdots;\left(E\left(\tfrac{p}{2}\right)+k'\right)n+\varkappa$$

in umgekehrter Reihenfolge einsetzt, so erhält man successive

$$\text{Max.}(p''n+\varkappa-2)=0,1,2,\cdots,\left(\left[p-E\left(\tfrac{p}{2}\right)-2\right]n+k+1-\varkappa\right),$$

wobei offenbar

$$(p-1)n+k+1<2\left\{\left[E\left(\tfrac{p}{2}\right)+1\right]n+\varkappa\right\},$$

also

$$\left[p-E\left(\tfrac{p}{2}\right)-2\right]n+k+1-\varkappa<\left[E\left(\tfrac{p}{2}\right)+1\right]n+\varkappa$$

ist, was zu beweisen war.

Für spätere Rechnungen wird es vortheilhaft sein, aus der Gruppe III. noch die $(k+1)$ letzten Grössen

$$\text{IV.} \quad u_{(p-1)n+1},\ u_{(p-1)n+2},\ \cdots,\ u_{(p-1)n+k+1}$$

auszuscheiden und besonders zu behandeln. Man überzeugt sich leicht, dass der Coefficient von $u_{(p-1)n+1}$ eine homogene ganze Function von $(u_1, u_2, \cdots, u_{k+1})$, der Coefficient von $u_{(p-1)n+2}$ eine solche von den Grössen $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, etc., der Coefficient von $u_{(p-1)n+k'}$ eine ebensolche von $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-k'+2})$, und endlich der Coefficient von $u_{(p-1)n+k+1}$ eine solche homogene Function von u_1 und u_2 ist; alle diese homogenen Functionen sind von der constanten Dimension $n-k-1$, während das Gewicht derselben derart variirt, dass das von $(u_1, u_2, \cdots, u_{k-k'+2})$, $(n-k')$ ist; so dass dasselbe den Index von $u_{(p-1)n+k'}$ zu pn ergänzt. Dieses stimmt auch in dem Gliede $u_1^{n-k-1}\, u_{(p-1)n+k+1}$. Bemerkenswerth ist, dass diese Gesetze von p unabhängig sind.

Aus der folgenden Tabelle wird man die Construction für den Fall $q+t=1$ leicht überschauen können.

Tabelle

für die Exponenten μ von $u_{k'}$, die den Werthen $k = 0, 1, 2, \ldots . 10, k$ entsprechen können, wenn $(q + t - 1) = 0$ ist.

k	k'	$\mu \leqq \frac{k}{k'-1}$	M_1
0	> 1	0	0
	$= 1$	n	n
1	> 2	0	0
	$= 2$	1	1
	$= 1$	$n - 2$	2
2	> 3	0	0
	$= 3$	1	1
	$= 2$	(1), 2	2
	$= 1$	$n - 4$; $n - 3$	$n - 3$
3	> 4	0	0
	$= 4$	1	1
	$= 3$	1	1
	$= 2$	1, (2), 3	3
	$= 1$	$n - 6$; $n - 5$; $n - 4$	$n - 4$
4	> 5	0	0
	$= 5$	1	1
	$= 4$	1	1
	$= 3$	1, 2	2
	$= 2$	1, 2, (3), 4	4
	$= 1$	$n-8$; $(n-7)$; $n-6$; $n-5$	$n - 5$
5	> 6	0	0
	$= 6$	1	1
	$= 5$	1	1
	$= 4$	1, 1	1
	$= 3$	1, 2, 1	2
	$= 2$	1, 2, 3, (4), 5	5
	$= 1$	$n - 10$; $n - 9$; $n - 8$; $n - 7$; $n - 6$	$n - 6$
6	> 7	0	0
	$= 7$	1	1
	$= 6$	1	1
	$= 5$	1	1
	$= 4$	1, 2	2
	$= 3$	1, 2, 3	3
	$= 2$	1, 2, 3, 4, (5), 6	6
	$= 1$	$n-12$; $n-11$; $n-10$; $n-9$; $n-8$; $n-7$	$n - 7$
7	> 8	0	0
	$= 8$	1	1
	$= 7$	1	1
	$= 6$	1	1
	$= 5$	1	1
	$= 4$	1, 2	2
	$= 3$	1, 2, 3	3
	$= 2$	1, 2, 3, 4, 5, (6), 7	7
	$= 1$	$n-14$; $n-13$; $n-12$; $n-11$; $n-10$; $n-9$; $n-8$	$n - 8$
8	> 9	0	0
	$= 9$	1	1
	$= 8$	1	1
	$= 7$	1	1
	$= 6$	1	1
	$= 5$	1, 2	2
	$= 4$	1, 2	2
	$= 3$	1, 2, 3, 4	4
	$= 2$	1, 2, 3, 4, 5, 6, (7), 8	8
	$= 1$	$n-16$; $n-15$; $n-14$; $n-13$; $n-12$; $n-11$; $n-10$; $n-9$;	$n - 9$
9	> 10	0	0
	$= 10$	1	1
	$= 9$	1	1
	$= 8$	1	1
	$= 7$	1	1
	$= 6$	1	1
	$= 5$	1, 2	2
	$= 4$	1, 2, 3	3
	$= 3$	1, 2, 3, 4	4
	$= 2$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, (8), 9	9
	$= 1$	$n - 18$; .... $n - 10$	$n - 10$
10	> 11	0	0
	$= 11$	1	1
	$= 10$	1	1
	$= 9$	1	1
	$= 8$	1	1
	$= 7$	1	1
	$= 6$	1, 2	2
	$= 5$	1, 2	2
	$= 4$	1, 2, 3	3
	$= 3$	1, 2, 3, 4, 5	5
	$= 2$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (9), 10	10
	$= 1$	$n - 20$; .... $n - 11$	$n - 11$
		Allgemeiner:	
k	$> k + 1$	0	0
	$= k + 1$	1	1
	⋮	⋮	⋮
	$\geqq E\left(\frac{k+4}{2}\right)$	1	1
	$= E\left(\frac{k+2}{2}\right)$	1, 2	2
	⋮	⋮	⋮
	k'	1, 2, 3; .... $E\left(\frac{k}{k'-1}\right)$	$E\left(\frac{k}{k'-1}\right)$
	⋮	⋮	⋮
	2	1, 2, 3; .... $k-2$, $(k-1)$, k	k
	1	$n-2k$; $n-2k+1$; .... $n-k-1$	$n - k - 1$

$M_1 = E\left(\frac{k}{k'-1}\right)$; $M_2 = n - k$;
Maximalwerth von μ ist die kleinere unter den Zahlen M_1 und M_2.

Die eingeklammerten Grössen sind durch die Bemerkung 7) für μ, wenn $k' = 2$ ist, ausgeschlossen.

f) Nehmen wir noch zur Vervollständigung den speciellen Fall $m = 2$, also $k = n - 2$ an, so sind alle Glieder von der zweiten Dimension und das erste Glied ($t = 0$) vom Gewichte qn, welches aus sämmtlichen Grössen

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{qn-1}$$

und zwar in der Form auftritt

$$\sum u_{\mathfrak{l}}\, u_{qn-\mathfrak{l}},$$

wobei $\mathfrak{l}$ die ganzzahligen Werthe $\mathfrak{l} = 1, 2, 3, \cdots, E\left(\frac{qn}{2}\right)$ annimmt, so dass nur für $qn = 2\lambda$ die Grösse u_λ im Quadrate vorkommt; sonst kommen alle Grössen darin linear vor.

Das zweite Glied hat die Form

$$\sum u_{\mathfrak{l}_1}\, u_{(q+1)n-\mathfrak{l}_1},$$

wobei $\mathfrak{l}_1$ die ganzzahligen Werthe $\mathfrak{l}_1 = 1, 2, 3, \cdots, E\left(\frac{(q+1)n}{2}\right)$ annimmt, so dass nur für $(q+1)n = 2\lambda_1$ die Grösse u_{λ_1} im Quadrate erscheint; sonst aber kommen *alle* Grössen darin linear vor etc., und allgemein hat das $(t+1)^{\text{te}}$ Glied (für $t = t$) die Form

$$\sum u_{\mathfrak{l}_t}\, u_{(q+t)n-\mathfrak{l}_t},$$

wobei $\mathfrak{l}_t = 1, 2, 3, \cdots, E\left(\frac{(q+t)n}{2}\right)$ bedeutet, so dass nur, wenn $\frac{(q+t)n}{2}$ eine ganze Zahl ist, $u_{\frac{(q+t)n}{2}}$ zum Quadrate vorkommt; sonst aber kommen alle Grössen u darin nur linear vor.

Fasst man alles hier Auseinandergesetzte zusammen, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Werden die Glieder der unendlichen Reihe

$$V - U_0 = \sum_0^\infty{}^{p_1} u_{p_1} - \sum_0^\infty{}^{p_2} u_{p_2 n}$$

in Gruppen so eingetheilt, dass zur t^{ten} Gruppe die Grössen

$$u_{(q+t)n+1}, \quad u_{(q+t)n+2}, \cdots, u_{(q+t)n+n-1}$$

gehören, so besitzt

$$S_n^t\, d\left[(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1};\ s_n)_{\frac{qn}{n-k}}^{n-k}\right]$$

1) *die* $(k+1)$ *ersten Grössen der* t^{ten} *Gruppe nur linear;*
2) *keine einzige Grösse einer höhern Gruppe überhaupt;*
3) *wohl aber die Grössen aller frühern Gruppen möglicherweise zu höhern Potenzen.*

In dieser ganzen Betrachtung ist eine beschränkende Voraussetzung gemacht worden, dass in unserer Reihe diejenigen u, deren Indices die Congruenz $J \equiv 0$ (mod. n) befriedigen, nicht vorkommen. Hebt man diese Beschränkung auf, so modificirt sich das obige Gesetz etwas, aber ganz unwesentlich. Natürlich wird man dann zur t^{ten} Gruppe auch die Grösse $u_{(q+t)n}$ zählen müssen. Aber die Form der Glieder complicirt sich dann ganz bedeutend; und weil man für unsern Zweck den etwas allgemeinern Fall, wie wir weiter sehen werden, leicht in eindeutiger Weise auf jenen speciellern zurückführen kann, so habe ich es nicht für nothwendig erachtet, hier bald bei der Aufstellung des allgemeinen Gesetzes auf die complicirtere Form einzugehen. Aus den später durchgeführten Beispielen für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wird indess diese Modification klar genug hervortreten.

Drittes Capitel.

Allgemeine Lösung der algebraischen Gleichungen höhern Grades mit Hilfe von Cofunctionen aus Potenzreihen.

§ 8.

Anwendung der obigen Operation auf die formale Bildung der Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \cdots,$$

deren n circumplexen Functionen $f(r_n^h x)$ in der Umgebung von $x = 0$ für jeden Werth von x die n Wurzeln einer gegebenen Gleichung n^{ten} Grades

$$(\lambda) \quad F(z, x) = z^n + \varphi_{n-1}(x)\, z^{n-1} + \varphi_{n-2}(x) z^{n-2} + \cdots \\ \cdots + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0$$

darstellen.

a) Wir stellen uns jetzt die Frage: wie müssen die Coefficienten $\varphi_k(x)$ in einer nach z gegebenen Gleichung n^{ten} Grades $F(z, x) = 0$ als Potenzreihen

$$\varphi_k(x) = \alpha_{k,0} + \alpha_{k,1} x + \alpha_{k,2} x^2 + \cdots$$

beschaffen sein, damit die n circumplexen Functionen einer durch die $\varphi_k(x)$ zu bestimmenden Potenzreihe

$$(\mu) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

die n Wurzeln der Gleichung in der Umgebung von $x = 0$*) für jeden Werth von x repräsentiren.

---

*) Die Umgebung von $x = 0$ ist nur gewählt, weil dieser Fall eine kleine Erleichterung im Schreiben gewährt; es ist aber selbstverständlich, dass alles für diese Umgebung Bewiesene auf die Umgebung von $x = b$ sofort übertragen werden kann, wenn man für x setzt $x - b$ und für den Punkt $x = b$ dieselben Vorschriften überträgt, welche sich hier für $x = 0$ etwa ergeben sollten.

Nehmen wir nun an, die Aufgabe sei gelöst und es seien $\varphi_k(x)$ und dann $f(x)$ in gehöriger Weise bestimmt, so werden für die Partialfunctionen

$$(\nu) \quad p_{n,i} = f_{n,i}(x) = a_i x^i + a_{n+i} x^{n+i} + a_{2n+i} x^{2n+i} + \cdots$$
$$\cdots + a_{qn+i} x^{qn+i} + \cdots$$

die in der Einleitung citirten n Gleichungen

$$(\varkappa) \qquad \sum' \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p) + (-1)^{n-k-1} \cdot \varphi_{(k)}(x) = 0;$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

identisch befriedigt werden müssen; weil aber dieses in einem endlichen Gebiete, d. h. für unendlich viele stetig aufeinander folgende Werthe von x geschehen soll, so wird bekanntlich jeder Coefficient von x in der nach Potenzen von x geordneten linken Seite von $(\varkappa)$ einzeln verschwinden müssen. Daraus werden sich nun unendlich viele Systeme von je n Gleichungen ergeben, welche zur Bestimmung der nöthigen Bedingungen und zur vollständigen Berechnung der a, da, wo die Bedingungen erfüllt sind, ausreichen. Nehmen wir zunächst $k = n - 1$ an, so erhalten wir die identische Gleichung

$$(n-1) \quad 0 = n p_0 + \varphi_{n-1}(x) = n\Big[(a_0 + \alpha_{n-1,0}) + (a_n + \alpha_{n-1,n}) x^n$$
$$+ (a_{2n} + \alpha_{n-1,2n}) x^{2n} + \cdots + (a_{qn} + \alpha_{n-1,qn}) x^{qn} + \cdots\Big]$$
$$+ \Big[\varphi_{n-1}(x) - \underset{n,0}{\varphi_{n-1}}(x)\Big].$$

Daraus ergeben sich sofort zwei für die Folge wichtige Bemerkungen:

1) Alle a, deren Indices die Congruenz

$$J \equiv 0 \pmod{n}.$$

befriedigen, bestimmen sich *linear* durch die α, deren erster Index constant gleich $n - 1$ ist und deren zweiten Indices dieselbe obige Congruenz befriedigen; es ist nämlich direct

$$a_{qn} = -\alpha_{n,qn}.$$

2) Alle α in $\varphi_{n-1}(x)$, deren zweiten Indices die obige Congruenz nicht befriedigen, also diejenigen, welche nicht zu der nullten Partialfunction n^{ter} Classe von $\varphi_{n-1}(x)$ gehören, d. h. diejenigen, welche noch in

$$\left[\varphi_{n-1}(x) - \underset{n,0}{\varphi_{n-1}}(x)\right]$$

übrig bleiben, identisch Null sein müssen.

Es ist aber leicht zu ersehen, dass, während die erste Bemerkung noch ein wenig modificirt werden muss, wenn sie für die übrigen $n-1$ Gleichungen, welche den übrigen $n-1$ Werthen von k entsprechen, gelten soll, gilt die zweite Bemerkung auch für die übrigen in $(\varkappa)$ enthaltenen Gleichungen ganz direct. In § 2, c (Einleitung) haben wir nämlich gesehen, dass in dem ausgerechneten Ausdruck

$$\sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p)$$

alle Glieder von der Dimension $n-k$ und vom Gewichte $G \equiv 0 \pmod{n}$ sind; d. h. der Ausdruck ist eine Summe von homogenen Functionen $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades von i^{ten}

$$(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

Partialfunctionen einer und derselben n^{ten} Classe, deren Glieder zwar nicht isobarisch sind, jedoch ist ihr Gewicht durch n theilbar. Wir haben aber oben gesehen, dass, wenn man solche Glieder als Potenzreihen darstellt, die Exponenten von x, welche mit dem Gewichte der entsprechenden Coefficienten übereinzustimmen haben, ebenfalls der Congruenz $\varepsilon \equiv 0 \pmod{n}$ genügen müssen. (Wie dieses aus der Sd-Operation am deutlichsten hervortritt.) Daraus ergiebt sich aber sofort, dass in der identischen Gleichung

$$(\varkappa) \qquad \sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p) + (-1)^{n-k-1}\varphi_k(x) = 0$$

auch $\varphi_k(x)$ so beschaffen sein muss, dass die Exponenten von x Multipla von n seien; d. h. die Bemerkung 2) gilt für alle Werthe von k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$. Daraus erhalten wir für unser gestelltes Problem zunächst *eine* Einschränkung der Möglichkeit.

Es ist, nämlich, *nur dann möglich, dass die n circumplexen Functionen einer Potenzreihe $f(x)$ mit ganzzahligen Exponenten für jeden Werth von x die n Wurzeln der Gleichung*

$$(\lambda) \quad F(z, x) = z^n + \varphi_{n-1}(x)z^{n-1} + \varphi_{n-2}(x)z^{n-2} + \cdots \\ \cdots + \varphi_1(x)z + \varphi_0(x) = 0$$

in einem endlichen Gebiete (in der Umgebung von $x = 0$ *repräsentiren sollen, wenn die noch vollkommen unbestimmten Potenzreihen* $\varphi_k(x)$ *die Gestalt haben*

$$\varphi_k(x) = \beta_{k,0} + \beta_{k,n}\, x^n + \beta_{k,2n}\, x^{2n} + \cdots + \beta_{k,qn}\, x^{qn} + \cdots$$

d. h. *wenn die* $\varphi_k(x)$ *nullte Partialfunctionen* n^{ter} *Classe sind.*

Eine zweite Einschränkung ergiebt sich ferner aus folgender Betrachtung.

An anderem Orte (im III[ten] Capitel des zweiten Abschnittes; vgl. Salzburger Vortrag § 2, *E*) habe ich bewiesen, dass

$$(\pi) \qquad \sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p) = \frac{\partial^k}{\partial p_0^k}\, \mathscr{D}(p)\, \frac{1}{k!}$$

unabhängig von dem Werthe von x stattfindet. Setzt man nun $x = 0$, und bedenkt, dass eine i^{te} Partialfunction für $x = 0$ immer Null ist mit Ausnahme des einzigen Falles $i = 0$, in welchem $\left[p_0(x)\right]_{x=0} = a_0$, so wird offenbar

$$\mathscr{D}(p)_{x=0} = a_0^n; \quad \sum \mathscr{D}^{(\bar{k})}(p) = \binom{n}{k} a_0^{n-k},$$

so dass die Relation (π) wirklich auch für $x = 0$ giltig bleibt, wenn man daran denkt, dass $\left(\partial p_0\right)_{x=0} = \partial a_0$ wird, und in der That

$$\binom{n}{k} a_0^{n-k} = \frac{\partial^k}{\partial a_0^k}\left(a_0^n\right)$$

ist. Setzt man aber diesen Werth in $(\varkappa)$ ein, so erhält man noch eine nothwendige Bedingung für unser gestelltes Problem; *es muss* nämlich

$$\left[\varphi_k(x)\right]_{x=0} = \beta_{k,0} = (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a_0^{n-k}$$

sein.

Der Definition nach wird die h^{te} circumplexe Function n^{ter} Classe aus $f(x)$ dadurch gebildet, dass man $r_n^h\, x$ anstatt x setzt, so dass für $x = 0$ *alle* n circumplexe Functionen, welche die Wurzeln der Gleichung in der Umgebung von $x = 0$ repräsentiren sollen, den gleichen constanten Werth

$$\left(f(r_n^h\, x)\right)_{x=0} = a_0$$

haben; *soll also die verlangte Repräsentation der n Wurzeln durch $f\left(r_n^h x\right)$ in der Umgebung von $x = 0$ **noch für den** Grenzwerth $x = 0$ selbst gelten, so muss für $x = 0$ der zugehörige Werth $z = a_0$ eine n-fache Wurzel der Gleichung sein.*

Setzt man die durch die soeben gefundenen zwei Beschränkungen näher bestimmten $\varphi_k(x)$ in die gegebene Gleichung ein, so ergiebt sich in der That für $x = 0$

$$F(z, 0) = (z - a_0)^n = 0.$$

Diese letzte Form der nothwendigen Bedingung ist also in den zwei obigen enthalten; nicht aber umgekehrt, weil die obigen zwei Bedingungen eine weitere Beschränkung für die übrigen α (ausser den absoluten Gliedern) auferlegen. Jene zwei Bedingungen sind aber auch hinreichend, wie sich das daraus ergeben wird, dass wir bei Voraussetzung ihrer Befriedigung nicht bloss die *Möglichkeit* der Lösung in der verlangten Weise nachweisen, sondern dieselbe auch wirklich durchführen wollen.

b) Handelt es sich nun um einen solchen Fall, wo die Coefficienten der gegebenen Gleichung nullte Partialfunctionen n^{ter} Classe von gewissen Potenzreihen von x von der für das verlangte Problem nothwendigen Beschaffenheit wirklich sind, dass das absolute Glied in dem Coefficienten von z^k den Werth $(-1)^{n-k}\binom{n}{k} a_0^{n-k}$ hat, für welchen Fall wir diese Coefficienten mit

$$\varphi_k(x) = (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a_0^{n-k} + \alpha_{k,n} x^n + \alpha_{k,2n} x^{2n} + \cdots + \alpha_{k,qn} x^{qn} + \cdots$$

bezeichnen, so kann man in der That die Function $f(x)$ so bestimmen, dass $f(r_n^h x)$; $(h = 0, 1, 2, \cdots n-1)$ in dem verlangten endlichen Gebiete für jeden Werth von x die Wurzeln von

$$(\lambda) \qquad F(z, x) = \sum_0^n{}^k \varphi_k(x) z^k = 0; \qquad \varphi_n(x) = 1$$

liefern sollen.

Um nicht die Rechnung ohne besondere Noth bedeutend zu compliciren, nehmen wir noch an, es sei die speciellere

Gleichung gegeben, in der $\varphi_{n-1}(x) = 0$ identisch erfüllt sei, auf welchen Fall der allgemeine bekanntlich immer *eindeutig* zurückgeführt werden kann. Schon bei der Lösung der Gleichungen der ersten vier Grade haben wir nämlich gesehen, dass die Rechnung mit unsern Determinanten sich ganz bedeutend vereinfacht, wenn man $p_0 = 0$ hat, d. h. aber, da

$$n p_0 = \sum_0^{n-1} {}^h c_h$$

ist, wenn die Summe der Wurzeln unserer Gleichung gleich Null ist; oder, weil der Coefficient von z^{n-1} die Summe der Wurzeln (mit umgekehrtem Vorzeichen) repräsentirt, wenn die vorgelegte Gleichung die sogenannte Reducente ist. In diesem Falle gestalten sich dann die n Bedingungsgleichungen in der einfachern Form:

$$(0) \qquad \varphi_0(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ p_1 & 0 & p_{n-1} & \cdots & p_2 \\ p_2 & p_1 & 0 & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(1) \qquad \varphi_1(x) = (-1)^{n-1} n \begin{vmatrix} 0 & p_{n-1} & \cdots & p_2 \\ p_1 & 0 & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$(k) \qquad \varphi_k(x) = (-1)^{n-k} \sum \mathscr{D}^{(k)}(p)_{p_0=0}$$

$$\vdots$$

$$(n-2) \qquad \varphi_{n-2}(x) = -n \Big[p_1 p_{n-1} + p_2 p_{n-2} + p_3 p_{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + p_{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} p_{E\left(\frac{n+2}{2}\right)} + \left(E\left(\tfrac{n}{2}\right) - \frac{n-1}{2}\right) p_{\frac{n}{2}}^2 \Big]$$

$$\vdots$$

$$(n-1) \qquad \varphi_{n-1}(x) = 0.$$

Bedenkt man nun, dass für den Coefficienten von $x^{q n}$ in der ausgerechneten und nach Potenzen von x geordneten Gleichung (k) für ein gewisses k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ genau

dasjenige in a gilt, was wir oben in u für das Glied mit dem Gewichte qn in

$$\sum_0^\infty{}_t S_n^t d(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}; s_n)_{\frac{qn}{m}}^m$$

bewiesen haben, so bekommt man für den Coefficienten von x^n, der für sich verschwinden muss, die $n - 1$ Gleichungen, von denen *nur die eine* (für $k = 0$) *eine binomische Gleichung* n^{ten} *Grades, während alle übrigen lineare Gleichungen sind,* aus welchen zunächst die $(n - 1)$ Grössen der ersten Gruppe

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$$

durch die als gegeben vorausgesetzten Grössen

$$\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \cdots, \alpha_{n-1,n}$$

und zwar alle a, bis auf das *eine* a_1, durch jene α und a_1 *eindeutig* ausgedrückt werden können. Man hat nämlich:

aus $k = 0$, $\quad a_1^n = (-1)^n \alpha_{0,n}$

„ $k = 1$, $\quad n a_1^{n-2} a_2 = (-1)^{n-1} \alpha_{1,n}$

„ $k = 2$, $\quad n a_1^{n-3} a_3 + n_{1,2} a_1^{n-4} a_2^2 = (-1)^{n-2} \alpha_{2,n}$

„ $k = 3$, $\quad n a_1^{n-4} a_4 + n_{1,3}(a_1^{n-5} a_2) a_3 + n_{2,3} a_1^{n-6} a_2^3 = (-1)^{n-3} \alpha_{3,n}$

„ $k = 4$, $\quad n a_1^{n-5} a_5 + n_{1,4}(a_1^{n-6} a_2) a_4 + n_{2,4}(a_1, a_2, a_3)_{n-3}^{n-5} a_3 + n_{3,4} a_1^{n-8} a_2^4 = (-1)^{n-4} \alpha_{4,n}$

$\vdots$

„ $k = k$,
$$n a_1^{n-k-1} a_{k+1} + n_{1,k}(a_1^{n-k-2} a_2) a_k + n_{2,k}(a_1, a_2, a_3)_{n-k+1}^{n-k-1} a_{k-1} + \cdots + n_{E\left(\frac{k}{2}\right),k}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{E\left(\frac{k+2}{2}\right)}\right)_{n-E\left(\frac{k+4}{2}\right)}^{n-k-1} a_{E\left(\frac{k+4}{2}\right)} + \cdots + n_{k-1,k} a_1^{n-2k} a_2^k = (-1)^{n-k} \alpha_{k,n}$$

$\vdots$

„ $k = n-2$,
$$n\left\{a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} a_{E\left(\frac{n+2}{2}\right)} + \left[E\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{n-1}{2}\right] a_{\frac{n}{2}}^2\right\} = (-1)^2 \alpha_{n-2,n}.$$

(Die Summe aller Zahlencoefficienten in der Gleichung für $k = k$ ist immer $n + n_{1,k} + n_{2,k} + \cdots + n_{k-1,k} = \binom{n}{k}$.)

Für $k = 0$ ist also a_1 mittelst der binomischen Gleichung n^{ten} Grades durch $\alpha_{0,n}$ gegeben, dann ist für $k = 1$ eine lineare Gleichung für a_2 gegeben, welche a_2 durch a_1 und $\alpha_{1,n}$ ausdrückt; dann wird a_3 (für $k = 2$) linear durch a_2, a_1 und $\alpha_{2,n}$ ausgedrückt und so fort, bis endlich aus der Gleichung für $k = n - 2$ die letzte Grösse der ersten Gruppe, nämlich a_{n-1} linear durch die mittels der frühern Gleichungen bereits bestimmten Grössen $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_2, a_1$ und $\alpha_{n-2,n}$ eindeutig ausgedrückt wird.

Ferner folgt dann für den Coefficienten von x^{2n}, der für sich allein verschwinden muss, das System von $(n-1)$ *lauter linearen* Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung der $(n-1)$ Grössen der zweiten Gruppe:

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ \ldots,\ a_{2n-1}.$$

Man hat nämlich:

aus $k = 0$, $\quad n a_1^{n-1} a_{n+1} = B_{0,2n}$

„ $k = 1$, $\quad a_1^{n-2} a_{n+2} + (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \cdot a_{n+1} = B_{1,2n}$

„ $k = 2$, $\quad a_1^{n-3} a_{n+3} + (a_1, a_2)_{n-2}^{n-3} \cdot a_{n+2} + (a_1, a_2, a_3)_{n-1}^{n-3} a_{n+1} = B_{2,2n}$

„ $k = 3$, $\quad a_1^{n-4} a_{n+4} + (a_1, a_2)_{n-3}^{n-4} \cdot a_{n+3} + (a_1, a_2, a_3)_{n-2}^{n-4} a_{n+2} + (a_1, a_2, a_3, a_4)_{n-1}^{n-4} a_{n+1} = B_{3,2n}$

„ $k = 4$, $\quad a_1^{n-5} a_{n+5} + (a_1, a_2)_{n-4}^{n-5} \cdot a_{n+4} + (a_1, a_2, a_3)_{n-3}^{n-5} a_{n+3} + (a_1, a_2, a_3, a_4)_{n-2}^{n-5} a_{n+2} + (a_1, a_2, \ldots, a_5)_{n-1}^{n-5} a_{n+1} = B_{4,2n}$

$\vdots$

„ $k = k$, $\quad a_1^{n-k-1} \cdot a_{n+k+1} + (a_1, a_2)_{n-k}^{n-k-1} \cdot a_{n+k} + (a_1, a_2, a_3)_{n-k+1}^{n-k-1} \cdot a_{n+k-1} + \cdots + (a_1, a_2, \ldots, a_{k'+2})_{n-k+k'}^{n-k-1} \cdot a_{n+k-k'} + \cdots + (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})_{n-1}^{n-k-1} \cdot a_{n+1} = B_{k,2n}$

$\vdots$

„ $k = n - 2$, $\quad a_1 a_{2n-1} + a_2 a_{2n-2} + \cdots + a_{k'} a_{2n-k'} + \cdots + a_{n-2} a_{n+2} + a_{n-1} a_{n+1} = B_{n-2,2n}$

wobei die $B_{k,2n}$ bekannte Ausdrücke von den aus dem obigen Systeme bereits bestimmten Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und den als gegeben vorausgesetzten Grössen α bedeuten.

In ganz derselben Weise liefern die Coefficienten von x^{3n}, welche einzeln gleich Null sein müssen, zur eindeutigen Bestimmung der $n-1$ Grössen der dritten Gruppe:

$$a_{2n+1},\ a_{2n+2},\ \ldots,\ a_{3n-1}$$

durch die bereits bestimmten a mit kleinern Indices als $2n$ und durch die als gegeben vorausgesetzten Zahlen $\alpha_{k,3n}$ die $n-1$ linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\text{für } k=0, \quad & n a_1^{n-1} a_{2n+1} = B_{0,3n} \\
\text{,, } k=1, \quad & a_1^{n-2} a_{2n+2} + (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \cdot a_{2n+1} = B_{1,3n} \\
\text{,, } k=2, \quad & a_1^{n-3} a_{2n+3} + (a_1, a_2)_{n-2}^{n-3} \cdot a_{2n+2} \\
& \qquad + (a_1, a_2, a_3)_{n-1}^{n-3} \cdot a_{2n+1} = B_{2,3n} \\
\text{,, } k=3, \quad & a_1^{n-4} a_{2n+4} + (a_1, a_2)_{n-3}^{n-4} \cdot a_{2n+3} \\
& \qquad + (a_1, a_2, a_3)_{n-2}^{n-4} \cdot a_{2n+2} \\
& \qquad + (a_1, a_2, a_3, a_4)_{n-1}^{n-4} \cdot a_{2n+1} = B_{3,3n} \\
\text{,, } k=4, \quad & a_1^{n-5} a_{2n+5} + (a_1, a_2)_{n-4}^{n-5} \cdot a_{2n+4} \\
& \qquad + (a_1, a_2, a_3)_{n-3}^{n-5} \cdot a_{2n+3} \\
& \qquad + (a_1, a_2, a_3, a_4)_{n-2}^{n-5} \cdot a_{2n+2} \\
& \qquad + (a_1, a_2, \ldots, a_5)_{n-1}^{n-5} \cdot a_{2n+1} = B_{4,3n} \\
& \vdots \\
\text{,, } k=k, \quad & a_1^{n-k-1} a_{2n+k+1} + (a_1, a_2)_{n-k}^{n-k-1} \cdot a_{2n+k} \\
& \qquad + (a_1, \ldots, a_3)_{n-k+1}^{n-k-1} \cdot a_{2n+k-1} + \cdots \\
& \qquad + (a_1, \ldots, a_{k'-2})_{n-k+k'}^{n-k-1} \cdot a_{2n+k-k'} + \cdots \\
& \qquad + (a_1, \ldots, a_{k+1})_{n-1}^{n-k-1} \cdot a_{2n+1} = B_{k,3n} \\
& \vdots \\
\text{,, } k=n-2, \quad & a_1 a_{3n-1} + a_2 a_{3n-2} + \cdots + a_{k'} a_{3n-k'} + \cdots \\
& \qquad + a_{n-2} a_{2n+2} + a_{n-1} a_{2n+1} = B_{n-2,3n}.
\end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist leicht einzusehen, dass es ganz ebenso auch weiter gehen muss, so dass allgemein aus den Coefficienten von x^{pn} sich die $(n-1)$ linearen Gleichungen, nämlich

$$
\begin{aligned}
&\text{aus } k=0, && n a_1^{n-1} \cdot a_{(p-1)n+1} = B_{0,pn} \\
&\text{„ } k=1, && a_1^{n-2} \cdot a_{(p-1)n+2} + (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \cdot a_{(p-1)n+1} = B_{1,pn} \\
&\text{„ } k=2, && a_1^{n-3} \cdot a_{(p-1)n+3} + (a_1, a_2)_{n-2}^{n-3} \cdot a_{(p-1)n+2} \\
& && \qquad + (a_1, \ldots, a_3)_{n-1}^{n-3} a_{(p-1)n+1} = B_{2,pn} \\
&\vdots \\
&\text{„ } k=k, && a_1^{n-k-1} a_{(p-1)n+k+1} + (a_1, a_2)_{n-k}^{n-k-1} \cdot a_{(p-1)n+k} + \cdots \\
& && \qquad + (a_1, \ldots, a_{k'-2})_{n-k+k'}^{n-k-1} \cdot a_{(p-1)n+k-k'} + \cdots \\
& && \qquad + (a_1, \ldots, a_{k+1})_{n-1}^{n-k-1} \cdot a_{(p-1)n+1} = B_{k,pn} \\
&\vdots \\
&\text{„ } k=n-2, && a_1 a_{pn-1} + a_2 a_{pn-2} + \cdots + a_{k'} a_{pn-k'} + \cdots \\
& && \qquad + a_{n-1} a_{(p-1)n+1} = B_{n-2,pn}
\end{aligned}
$$

ergeben, wobei die $B_{k,pn}$ bekannte Ausdrücke sind, welche in sich ausser den gegebenen Zahlen α nur solche a enthalten, deren Indices kleiner als $(p-1)n$ sind, so dass sie bereits aus Systemen von linearen Gleichungen, welche durch das Verschwinden der Coefficienten von niedrigern Potenzen von x entstehen, bestimmt worden sind; auch in diesem allgemeinen Systeme von $(n-1)$ linearen Gleichungen in Bezug auf die $n-1$ Grössen der p^{ten} Gruppe

$$a_{(p-1)n+1},\ a_{(p-1)n+2},\ \cdots,\ a_{(p-1)n+n-1}$$

sind die Coefficienten dieser Grössen ebenfalls homogene ganze Functionen derselben $(n-1)$ Grössen der ersten Gruppe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n-1}$$

wie in den frühern Systemen von Gleichungen, und zwar wiederum von der Beschaffenheit, dass sämmtliche Coefficienten die zu bestimmenden Grössen zum Gewichte pn ergänzen, so dass der Coefficient von $a_{(p-1)n+x}$ das Gewicht $n-x$ hat; ferner ist die Dimension dieser Coefficienten in allen Gliedern der Gleichung, welche $k=k$ entspricht, $n-k-1$, so dass

sie in der letzten Gleichung, welche $k = n - 2$ entspricht, von der ersten Dimension, in der vorletzten von der zweiten etc. und in der ersten Gleichung, welche $k = 0$ entspricht, von der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Dimension sind. Ferner enthält der Coefficient von $a_{(p-1)n+k+1}$ keine anderen Grössen als a_1, der Coefficient von $a_{(p-1)n+k}$ kein a mit einem grössern Index als 2, etc., und allgemein enthält der Coefficient von $a_{(p-1)n+k-k'}$ kein a mit einem grössern Index als $k' - 2$. Alles dieses gilt für alle Systeme von Gleichungen, unabhängig von dem speciellen Werthe von p, wie man sich leicht durch die im vorigen Capitel bewiesenen Eigenschaften von $S_n^t d(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}; s_n)$ überzeugen kann. Ausserdem ist die Construction dieser Gleichungen des Systems eine äusserst einfache: die erste Gleichung für $k = 0$ enthält nur das einzige Glied mit der ersten Grösse der p^{ten} Gruppe: $a_{(p-1)n+1}$, woraus man den Werth

$$a_{(p-1)n+1} = \frac{B_{0,pn}}{n a_1^{n-1}} = \mathcal{D}_{1,pn}$$

in die zweite Gleichung für $k = 1$, welche nur die zwei ersten Grössen der p^{ten} Gruppe $a_{(p-1)n+1}$, $a_{(p-1)n+2}$ enthält, einsetzen kann, und so

$$a_{(p-1)n+2} = \frac{n a_1^{n-1} \cdot B_{1,pn} - (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \cdot B_{0,pn}}{n a_1^{2n-3}}$$

$$= \frac{\mathcal{D}_{2,pn}}{n a_1^{2n-3}} = \frac{\begin{vmatrix} B_{0,pn}, & n a_1^{n-1} \\ B_{1,pn}, & (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}}{n a_1^{2n-3}}$$

erhält; und wenn so ferner diese Werthe in die dritte Gleichung, welche $k = 2$ entspricht und nur die drei ersten Grössen der p^{ten} Gruppe: $a_{(p-1)n+1}$, $a_{(p-1)n+2}$, $a_{(p-1)n+3}$ enthält, eingesetzt werden, so bekommt man:

$$a_{(p-1)n+3} = \frac{1}{n} a_1^{6-3n} \begin{vmatrix} B_{0,pn}, & 0, & n a_1^{n-1} \\ B_{1,pn}, & a_1^{n-2}, & (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \\ B_{2,pn}, & (a_1, a_2)_{n-2}^{n-3}, & (a_1, a_2, a_3)_{n-1}^{n-3} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{D}_{3,pn}}{n a_1^{3n-6}};$$

und in ganz derselben Weise auch allgemein die eindeutige Bestimmung:

$$a_{(p-1)n+\varkappa} = \frac{1}{n}\, a_1^{\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} - \varkappa n} \begin{vmatrix} B_{0,pn}, & 0, & 0, & 0 & \cdots & n a_1^{n-1} \\ B_{1,pn}, & 0, & 0, & 0 & \cdots & (a_1, a_2)_{n-1}^{n-2} \\ B_{2,pn}, & 0, & 0, & 0 & \cdots & (a_1, a_2, a_3)_{n-1}^{n-3} \\ B_{3,pn}, & 0, & 0, & 0 & \cdots & (a_1, a_2, \cdots, a_4)_{n-1}^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{\varkappa-3,pn}, & 0, & a_1^{n-\varkappa+2}, & (a_1, a_2)_{n-\varkappa+3}^{n-\varkappa+2} & \cdots & (a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-2})_{n-1}^{n-\varkappa+2} \\ B_{\varkappa-2,pn}, & a_1^{n-\varkappa+1}, & (a_1, a_2)_{n-\varkappa+2}^{n-\varkappa+1}, & (a_1, a_2, a_3)_{n-\varkappa+3}^{n-\varkappa+1} & \cdots & (a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1})_{n-1}^{n-\varkappa+1} \\ B_{\varkappa-1,pn}, & (a_1, a_2)_{n-\varkappa+1}^{n-\varkappa}, & (a_1, a_2, a_3)_{n-\varkappa+2}^{n-\varkappa}, & (a_1, a_2, a_3, a_4)_{n-\varkappa+3}^{n-\varkappa} & \cdots & (a_1, a_2, \cdots, a_\varkappa)_{n-1}^{n-\varkappa} \end{vmatrix}$$

durch die $(n-1)$ Grössen $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ und den entsprechenden $\varkappa$ Grössen $B_{0,pn}, B_{1,pn}, \cdots, B_{\varkappa-1,pn}$, welche ihrerseits wiederum ganz bestimmte Ausdrücke von jenen a sind; während diese a durch das erste System von n Gleichungen bestimmt wurden, unter denen alle ebenfalls linear waren, mit einer einzigen Ausnahme der allerersten binomischen Gleichung für a_1:

$$a_1^n = (-1)^n \alpha_{0,n}.$$

Mit wachsendem n complicirt sich die Rechnung allerdings; indess vermehrt sich aber zugleich auch die Anzahl der durch die Rechnung gewonnenen Glieder der Potenzreihe, da jeder Coefficient von x^{qn} zugleich n Glieder der Potenzreihe liefert.

Hat man auf diese Weise die Grössen a bestimmt, so repräsentirt die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_q\, a_q x^q; \quad (a_{qn} = 0)$$

durch ihre n circumplexen Functionen für jeden Werth von x in der Umgebung von $x = 0$, d. h. bis zum nächsten Puncte, wo zwei circumplexe Functionen einen und denselben Werth annehmen, sämmtliche Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$z^n + \varphi_{n-2}(x) z^{n-2} + \varphi_{n-3}(x) z^{n-3} + \cdots + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0,$$

sobald die Functionen $\varphi(x)$ beliebige nullte Partialfunctionen n^{ter} Classe sind, welche in einem gemeinschaftlichen Gebiete convergiren, während sie für $x = 0$ verschwinden. (Diese letzte Bedingung ist nur nöthig, falls die gegebene Gleichung das Glied mit z^{n-1} nicht besitzt, welchen Fall wir nur um die Rechnung zu erleichtern gewählt haben.) Alle übrigen unendlich vielen Grössen α sind sonst ganz beliebig, wenn nur der Quotient je zweier aufeinander folgenden

$$\frac{\alpha_{k,qn}}{\alpha_{k,(q-1)n}}$$

einer Grenze zustrebt. Sind aber $\varphi_k(x)$ keine unendlichen Reihen, sondern endliche ganze rationale Functionen von den Graden $p_k m$, wobei $p_k m$ noch so gross sein darf, so ist nicht einmal diese letzte Grenzbedingung für die α nöthig*).

Ist es nun zwar bekannt, dass eine Wurzel einer algebraischen Gleichung in Form einer Potenzreihe dargestellt werden kann, so hat doch unsere Darstellungsweise insofern noch einiges Interesse darin, dass eben *eine* und *dieselbe* Potenzreihe *sämmtliche* Wurzeln darstellt und zwar für n Werthe von x, deren absoluter Betrag derselbe bleibt und deren Argumente um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ sich von einander unterscheiden; d. h. für n Werthe, welche die Theilungspuncte der in n gleiche Theile getheilten Peripherie eines gewissen Kreises liegen. Die Coefficienten unserer Gleichung haben durch

---

*) Es kann natürlich nicht Wunder nehmen, dass hiermit die Möglichkeit zur Bildung einer Function mit *unendlich vielen Willkürlichkeiten* gegeben ist, die jedoch *immer* die Wurzeln einer algebraischen Gleichung repräsentirt, da *dieselben* Willkürlichkeiten auch in der jedesmal zugeordneten Gleichung mitexistiren.

ihre oben angegebene Beschaffenheit für diese n Puncte der Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt immer denselben Werth, da sie gegen die Substitution $r_n^h x$ anstatt x unempfindlich bleiben.

Die obige Beschränkung unserer Lösung auf die Umgebung von $x = 0$, d. h. auf den Kreis, innerhalb dessen keine gleichen Wurzeln liegen, folgt für unsere Auffassungsweise daraus, dass die Jacobi'sche Functionaldeterminante der symmetrischen Functionen der Cofunctionen, ausgedrückt als Functionen von den coordinirten Cofunctionen, für den Fall gleicher Werthe von verschiedenen coordinirten Cofunctionen, *und nur für diesen Fall*, verschwindet, was uns als Kriterium der Bestimmbarkeit, respective Unbestimmbarkeit der Wurzeln mit Hilfe der Cofunctionen gilt. (Vgl. zweiten Abschnitt des Werkes sowohl, wie auch den Salzburger Vortrag des Verfassers.)

Unser Resultat stimmt aber genau auch mit dem überein, was nach der bekannten Theorie von Puiseux („Recherches sur les fonctions algébriques" in Liouville's Journal de Mathématiques pures et appliquées T. XV) sich ergeben müsste. Man kann am leichtesten sich davon überzeugen, wenn man den von Herrn M. Hamburger in seiner Abhandlung „Ueber die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen" (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 16) eingeschlagenen Weg verfolgt.

§ 9.

Verification der obigen Darstellung der Wurzeln.

Aus der Gleichung in der gegebenen Form

$$F(z,x) = z^n + \varphi_{n-1}(x)\, z^{n-1} + \varphi_{n-2}(x)\, z^{n-2} + \cdots + \varphi_1(x)\, z + \varphi_0(x) = 0$$

erhält man direct, wenn man die linke Seite partiell nach z differentiirt,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = n z^{n-1} + (n-1)\varphi_{n-1}(x) z^{n-2} + \cdots + 2\varphi_2(x) z + \varphi_1(x)$$

und durch k-malige Wiederholung

$$\frac{\partial^k F}{\partial z^k} = \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \varphi_{n-1}(x) z^{n-k-1} + \cdots + \frac{(k+1)!}{1!} \varphi_{k+1}(x) z + \frac{k!}{0!} \varphi_k(x),$$

so dass für $k = n - 1$

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial z^{n-1}} = (n!) z + \varphi_{n-1}(x)$$

und für $k = n$

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n} = n!$$

und endlich für jedes $k > n$, etwa $k = n + \lambda$ ($\lambda =$ einer ganzen positiven von Null verschiedenen Zahl) immer

$$\frac{\partial^{n+\lambda} F}{\partial z^{n+\lambda}} = 0$$

sich ergiebt. Nach der Voraussetzung war aber

$$(-1)^{n-1} \varphi_1(x) = \binom{n}{1} a_0^{n-1} + (a_0, a_1, \cdots, a_n) x^n + (a_0, a_1, \cdots, a_{2n}) x^{2n} + \cdots,$$

so dass der Coefficient von z^k in $F(z, 0)$, den Werth

$$\varphi_k(x_0) = (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_0^{n-k}$$

annimmt, und somit wird

$$\left(\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\right)_{x=0} = \frac{n!}{(n-k)!} (z - a_0)^{n-k}.$$

Sonach ist

$$\left(\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\right)_{\substack{x=0 \\ z=a_0}} = 0, \quad \text{wenn} \quad \varkappa \lesssim 0$$

und

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n} = n!;$$

d. h. $z = a_0$ ist eine n-fache Wurzel der Gleichung

$$F(z, 0) = 0.$$

Dieses ist übrigens offenbar auch direct einzusehen, wenn man die nach der obigen Voraussetzung sich ergebenden Werthe

$$\varphi_1(0) = (-1)^{n-1}\binom{n}{1} a_0^{n-1}$$

in die gegebene Gleichung einsetzt, wonach

$$F(z, 0) = (z - a_0)^n = 0$$

sich ergiebt.

Bildet man die successiven partiellen Ableitungen von $F(z, x)$ nach x, so erhält man

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k} = \varphi_{n-1}^{(k)}(x)\, z^{n-1} + \varphi_{n-2}^{(k)}(x)\, z^{n-2} + \cdots$$
$$+ \varphi_1^{(k)}(x)\, z + \varphi_0^{(k)}(x);$$

nun ist aber $\varphi_1(x)$ eine nullte Partialfunction n^{ter} Classe von x, so dass

$$\varphi_1^{(1)}(x),\ \varphi_1^{(2)}(x), \cdots, \varphi_1^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ verschwinden, während für denselben Werth $x = 0$ für $k = n$

$$\varphi_1^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\alpha_{1,n}\,(n!)$$

sich ergiebt, wenn man die Bezeichnung

$$(-1)^{n-1}\varphi_1(x) = \binom{n}{1} a_0^{n-1} + \alpha_{1,n}x^n + \alpha_{1,2n}x^{2n} + \cdots$$

einführt. Es ist nämlich dann

$$(-1)^{n-1}\varphi_1^{(k)}(x) = \frac{(n!)}{(n-k)!}\alpha_{1,n}x^{n-k} + \frac{(2n)!}{(2n-k)!}\alpha_{1,2n}x^{2n-k}$$
$$+ \cdots + \frac{(qn)!}{(qn-k)!}\alpha_{1,qn}x^{qn-k} + \cdots,$$

woraus sofort ersichtlich ist, dass

$$\varphi_1^{(k)}(0) = 0,$$

wenn

$$k < n$$

und

$$\varphi_1^{(k)}(0) = (-1)^{n-1}(n!)\,\alpha_{1,n},$$

wenn

$$k = n$$

ist; ferner ist wieder

$$\varphi_1^{(k)}(0) = 0,$$

wenn

$$2n > k > n$$

und

$$\varphi_{\mathfrak{l}}^{(k)}(0) = (-1)^{n-\mathfrak{l}}(2n)!\,\alpha_{\mathfrak{l},2n},$$

wenn

$$k = 2n,$$

etc., so dass allgemein

$$\varphi_{\mathfrak{l}}^{(k)}(0) = 0$$

für

$$k \equiv i \ (\text{mod.}\ n),$$

$$\varphi_{\mathfrak{l}}^{(k)}(0) = (-1)^{n-\mathfrak{l}}(qn)!\,\alpha_{\mathfrak{l},qn}$$

für

$$k = qn$$

ist. Darnach ist für beliebige Werthe von z, sobald k kein Multiplum von n ist,

$$\left(\frac{\partial^k F}{\partial x^k}\right)_{x=0} = 0, \qquad (k \equiv i \ (\text{mod.}\ n)),$$

während für den Fall $k = qn$ immer

$$\frac{\left(\frac{\partial^{qn} F}{\partial x^{qn}}\right)_{x=0}}{(qn)!} = -\alpha_{n-1,qn} z^{n-1} + \alpha_{n-2,qn} z^{n-2} - + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_{1,qn} z + (-1)^n \alpha_{0,qn}$$

stattfindet.

Endlich ist noch

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} F}{\partial x^\mu \partial z^\nu} = \frac{(n-1)!}{(n-\nu-1)!}\varphi_{n-1}^{(\mu)}(x) z^{n-\nu-1} + \frac{(n-2)!}{(n-\nu-2)!}\varphi_{n-2}^{(\mu)}(x) z^{n-\nu-2} + \cdots + \frac{(\nu+1)!}{1!}\varphi_{\nu+1}^{(\mu)}(x) z + \nu\varphi_\nu^{(\mu)}(x),$$

so dass für $x = 0$ die Factoren $\varphi_{\mathfrak{l}}^{(\mu)}(0)$ nur, wenn $\mu = qn$ ist, Null sein können, und für $z = a_0$ hat man dann

$$\left(\frac{\partial^{qn+\nu} F}{\partial x^{qn}\partial z^\nu}\right)_{\substack{x=0\\ z=a_0}} = (qn)!\Big[-\frac{(n-1)!}{(n-\nu-1)!}\alpha_{n-1,qn} a_0^{n-\nu-1} + \frac{(n-2)!}{(n-\nu-2)!}\alpha_{n-2,qn} a_0^{n-\nu-2} - + \cdots + (-1)^{n-\nu-1}(\nu+1)!\,\alpha_{\nu+1,qn} a_0 + (-1)^{n-\nu}(\nu!)\alpha_{\nu,qn}\Big].$$

Vergleicht man dieses mit den Resultaten der oben angeführten Abhandlung von Hamburger, so findet man, dass

die Hamburger'sche *„Finalgleichung“* (im 16[ten] Jahrgange der Zeitschrift pag. 473) zur Bestimmung von $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0;\,z=a_0}$ wenn $x=0$, $z=a_0$ eine n-fache Wurzel der gegebenen Gleichung $F(z,x)=0$ ist, in unserm Falle die einfache Form annimmt:

$$\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_0 + \left(\frac{\partial^n F}{\partial z^n}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)^n = 0,$$

oder

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^n = -\frac{\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_0}{\left(\frac{\partial^n F}{\partial z^n}\right)_0} = -\left[-\alpha_{n-1,n}\,a_0^{n-1} + \alpha_{n-2,n}\,a_0^{n-2} - + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_{1,n}\,a_0 + (-1)^n\alpha_{0,n}\right],$$

was mit dem Werthe, welchen wir für a_1 durch Berechnung der cyklosymmetrischen Determinanten und Annullirung der einzelnen Coefficienten von x im allgemeinen Falle erhalten, oder, wenn man $a_0=0$ setzt, mit der einfachern Form

$$a_1^n = \left(\frac{dz}{dx}\right)^n = (-1)^n\alpha_{0,n}$$

vollkommen übereinstimmt.

Aus dieser letzten Gleichung ersieht man, dass die n Werthe von $a_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)_0$, so lange $\alpha_{0,n} \gtrless 0$ ist, *von einander verschieden* und jedenfalls (nach der Voraussetzung, dass die α nicht unendlich sind) alle *endlich* sein müssen. Nach der angeführten Abhandlung von Hamburger ist diese Bedingung hinreichend, damit z in der Umgebung von $x=0$ nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelt werde.

Eine solche Potenzreihe ist giltig in dem Kreise, welcher bis zum nächsten Verzweigungspunkte, d. h. bis zu einem solchen Werthe von x*), für welchen z eine vielfache Wurzel

*) Es bedarf kaum der Wiederholung, dass wir es hier immer nur zu thun haben mit dem Gebiete, innerhalb welchem sämmtliche gegebene Potenzreihen $\varphi(x)$ zugleich convergent sind, so dass nur in speciellen Fällen, wie die, wo die φ ganze rationale Functionen von x sind (was zum Behufe der Lösung von Gleichungen mit constanten Coefficienten, wie wir weiter unten sehen werden, vollkommen aus-

der Gleichung wird. Für unsern Fall würde das heissen bis zu einem Werthe von $x = x_1$, für welchen

$$(\varpi) \qquad f(r_n^{h_1} x_1) - f(r_n^{h_2} x_1) = 0$$

wird. Die Bedeutung einer solchen Bedingungsgleichung für die Gleichheit zweier circumplexen Functionen ist an anderem Orte discutirt worden. Hier sei nur *einerseits* bemerkt, dass die Erfüllung dieser Bedingung identisch ist mit dem Kriterium für das Verschwinden der Jacobi'schen Functionaldeterminante

$$J\left(\frac{\partial \overset{\sigma}{\underset{n}{\mathfrak{S}}}{}_{n-i}}{\partial p_k}\right) = 0,$$

welche im vierten Capitel des zweiten Abschnittes behandelt wurde. Dort wie hier ist die Gleichung von der *nullten* Partialfunction unabhängig; man sieht es hier direct, weil alle Glieder, die gegen r_n^h unempfindlich sind, d. h. alle, deren Exponenten Multipla von n sind, sich bei der Subtraction $f(r_n^{h_1} x) - f(r_n^{h_2} x)$ weggehoben haben.

Andrerseits würde die Nichterfüllung dieser Bedingungsgleichung aussagen, dass unsere Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

die Darstellung der Wurzeln durch ihre circumplexen Functionen $f(r_n^h x)$ für jeden Werth von *x in der ganzen Ebene* vertritt, sofern die Coefficienten der gegebenen Gleichung $\varphi_1(x)$ in der ganzen Ebene convergiren. Die Curve, auf welcher sämmtliche Verzweigungspunkte sich befinden, würde in diesem Falle in einen einzigen Punkt zusammengeschrumpft sein.

---

reicht) oder wenn die φ gewisse Functionen von Exponentialfunctionen sind, die ganze Ebene zu gleicher Zeit in Betracht kommt.

Der bei Weitem allgemeinere Fall dagegen, wo die φ solche analytische Functionen von x sind, welche zwar in jedem Gebiete durch gewisse Potenzreihen repräsentirt werden, jedoch so, dass in gewissen Gebieten immer andere und andere Potenzreihen die Darstellung jener Functionen übernehmen, dieser allgemeinere Fall, sage ich, wird uns erst später zu neuen Kunstgriffen veranlassen müssen, um auf jenen speciellern Fall zurückgeführt werden zu können.

Wiewohl es im Allgemeinen schwer fallen würde, a priori anzugeben ob eine Potenzreihe für gewisse Werthe der Variabeln verschwindet, oder nicht, so lassen sich in unserm Falle unter gewissen Umständen *allgemeine* Merkmale dafür in der leichtesten Weise angeben. Würde z. B. die Hauptfunction, welche durch ihre n circumplexen Functionen sämmtliche Wurzeln darstellen sollte, selbst eine i^{te} *Partialfunction* n^{ter} *Classe* sein, also $f_{n,i}(x)$, wobei $i \gtrless 0$ ist, so ist die h^{te} circumplexe Function derselben:

$$f_{n,i}(r_n^h x) = r_n^{ih} f_{n,i}(x),$$

so dass für keinen andern Werth als $z = 0$ die Gleichung

$$f_{n,i}(r_n^{h_1} x) - f_{n,i}(r_n^{h_2} x) = (r_n^{ih_1} - r_n^{ih_2}) f_{n,i}(x) = 0$$

befriedigt werden kann, während für $f_{n,i}(x) = 0$ sämmtliche Wurzeln zusammenfallen.

Für welche Gleichung dieses eintreten kann ist sehr leicht einzusehen; es werden alle übrigen Partialfunctionen $p_{i'}$, wenn $i' \gtrless i$ ist, Null sein müssen und die cyklosymmetrische Determinante wird

$$\mathscr{D}(p) = (-1)^i \cdot p_i^n,$$

so dass wir es mit der i^{ten} von den n mit der Gleichung mit lauter gleichen Wurzeln ein cyklisches System bildenden Gleichungen zu thun haben.

Da aber bei der Bildung der Differenz (w) die nullte Partialfunction gar nicht mitspielt, so wird auch

$$f_{n,0}(x) + A f_{n,i}(x)$$

die Eigenschaft besitzen, dass ihre sämmtlichen circumplexen Functionen, mit Ausnahme von dem einzigen Punkte, wo sie alle zusammenfallen, immer von einander verschieden sind. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die Gleichung eine binomische ist. Diese beiden Fälle sind im zweiten Capitel des dritten Abschnittes bei constanten Coefficienten behandelt worden. Allerdings sind sie sehr einfach; indess wird es sich an anderer Stelle zeigen, dass man denselben Gedankengang mit einiger Modification noch weiter, insbesondere für trinomische Gleichungen, verfolgen kann.

Wird aber die Bedingung (w) erfüllt, so gilt allerdings die obige Darstellung der Wurzeln nur innerhalb des oben erwähnten Kreises; indess werden wir verschiedene Methoden anwenden können, um jene Lösung für die ganze Ebene zu erweitern.

§ 10.

Angabe einiger Methoden zur Erweiterung der obigen Darstellung über jenen beschränkten Kreis hinaus.

Um die obige Darstellung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung n^{ten} Grades allgemein giltig zu machen, müssen wir uns bestreben zwei Beschränkungen wegzuschaffen: eine in Bezug auf die gegebene Gleichung, die andere in Bezug auf den Gültigkeitsbereich der gefundenen Darstellung. In Bezug auf die gegebene Gleichung haben wir nämlich oben die Beschränkung gehabt, dass die Coefficienten $\varphi_k(x)$ der Gleichung nur solche ganze rationale, oder solche irrationale oder transcendente Functionen sein dürfen, deren Exponenten durch n theilbar sind, und ausserdem müssen im Allgemeinen die absoluten Glieder in $\varphi_k(x)$ respective die Form $\alpha_{k0} = \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$ haben können, und falls $\varphi_{n-1}(x) = 0$ ist, müssen sämmtliche $\alpha_{k,0} = 0$ sein, wenn die Wurzeln überhaupt als circumplexe Functionen einer Potenzreihe mit ganzzahligen Exponenten auftreten sollen. In Bezug auf das Giltigkeitsgebiet war unsere Darstellung nur in der *Umgebung* von $z = 0$, d. h. bis zum nächsten Verzweigungspunkte zulässig. Handelt es sich nun um die Lösung einer Gleichung mit beliebigen constanten Coefficienten $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1, A_0$, so wird es darauf ankommen, die Functionen $\varphi_{n-1}(x), \varphi_{n-2}(x), \ldots, \varphi_1(x), \varphi_0(x)$ unserer ein für allemal zu lösenden Gleichung womöglich so zu wählen, dass für einen Werth von $x = x_1$, für welchen $f(x)$ convergirt und die $f(r_n^h x)$, die Wurzeln der Gleichung darstellen, $\varphi_k(x_1) = A_k$ werde; es würde eine ungeheure Erleichterung zur Auffindung solcher Functionen sein, wenn wir uns von jenen Beschränkungen befreien könnten. Ueber die Aufhebung oder Umformung der ersten Einschränkung der Form der Coefficienten der gegebenen Gleichung werden

wir im Nächsten ausführlich handeln, während wir hier einige Methoden zur Erweiterung des Giltigkeitsbereiches unserer Darstellung angeben wollen.

Die *erste* und wichtigste wäre die Abbildungsmethode von Herrn Fuchs, welche derselbe bei einem viel complicirteren Falle, nämlich bei der „Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen“ (Borchardt's Journal Bd. 75, pag. 177—223 und als Anhang zu dieser Abhandlung im selben Journal Bd. 76, pag. 175, 176) einführt. Würde man nämlich in unserer gegebenen Gleichung

$$z^n + \varphi_{n-1}(x) z^{n-1} + \cdots + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0$$

die Fuchs'sche Substitution

$$z = F(w) = \frac{f(w)}{w g(w)}$$

machen, wobei $f(w)$ und $g(w)$ ganze rationale Functionen der complexen Variabeln w sind, welche für $w = 0$ nicht verschwinden, so würde die in Bezug auf w gebildete Discriminante unserer Gleichung die Resultante sein, welche man durch die Elimination von w aus

$$F(w)^n + \varphi_{n-1}(x) F(w)^{n-1} + \cdots + \varphi_1(x) F(w) + \varphi_0(x) = 0$$

und der Ableitung dieser Gleichung nach w, welche man schreiben kann

$$F'(w)[n F^{n-1}(w) + (n-1(\varphi_{n-1}(x) \cdot F^{n-2}(w) + \cdots + \varphi_1(x)] = 0$$

erhält. — Man kann sich nun diese Elimination unter Anderem auch dadurch erwirkt denken, dass in der zweiten Gleichung für $F(w)$ im Klammerinhalte der Werth aus der vorhergehenden Gleichung eingesetzt werde und ausserdem noch in $F'(w)$ der aus der vorhergehenden berechnet gedachte (es kommt uns nämlich auf die wirkliche Ausrechnung hier nicht an) Werth von w. Für unsern Zweck genügt aber schon die auf der Hand liegende Thatsache, dass der jetzt erhaltene Klammerinhalt identisch ist mit demjenigen, welchen man erhalten würde, wenn man z aus der ursprünglich gegebenen Gleichung in ihre Ableitung nach z eingesetzt hätte; der neu erhaltene Klammerinhalt würde genau die Discriminante der ursprünglichen Gleichung sein. Ausser denjenigen Werthen von x, für welche schon die Discri-

minante der ursprünglichen Gleichung verschwindet, kann also die Discriminante der neuen Gleichung in *w nur noch für die Wurzeln der Gleichung*

$$F'(w) = 0$$

verschwinden; es lässt sich somit hierbei diese Methode der Abbildung des unendlichen Theiles der Ebene ausserhalb des Kreises, innerhalb dessen kein Verzweigungspunct liegt, auf den endlichen innerhalb jenes Kreises enthaltenen Theil der Ebene mit viel grösserer Leichtigkeit anwenden, als in dem complicirteren Falle der Integrale einer linearen Differentialgleichung des Herrn Fuchs, insofern dort einerseits die Kenntniss seiner fundamentalen Abhandlungen vom Bd. 66 und 68 des Borchardt'schen Journals vorausgesetzt werden muss, und andrerseits treten in jenem Falle durch seine Substitution ausser den Wurzeln von $F'(w)$ noch auch die Wurzeln von $w\,g(w) = 0$ als neue singuläre Puncte auf (vgl. Nr. 4 und 5 der zweiten Abtheilung der angeführten Abhandlung pag. 205, 206, 207), was hier nicht der Fall ist.

Diese in sehr vielen Fällen das Problem ganz anders beleuchtende und sehr fruchtbare Methode soll im zweiten Bande dieses Werkes, wo von der Theorie der Functionen complexer Variabeln ausgehend unsere Cofunctionen in ein ganz anderes Licht treten sollen, für unsern Fall zur weitern Durchführung kommen*), hier dagegen (in einem Abschnitte des ersten Bandes), wo planmässig die formale und elementare Seite der Sache möglichst ausschliesslich zur Verhandlung kommen soll, möchte ich mich vorläufig mit diesem kurzen Hinweise begnügen.

*) Besonders interessant zu werden verspricht noch die Anwendung eines speciellen Falles der von Poincaré bearbeiteten Fuchs'schen Gruppe von linearen rationalen Substitutionen von der Form $t = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ (Acta Mathematica Heft I), der specielle Fall nämlich, wenn die Determinante eine *cyklosymmetrische* ist, also $f_i = \frac{a_i z + b_i}{b_i z + a_i}$, wobei die Eintheilung in reelle und complexe Substitutionen mit der Eintheilung nach $(a+d)^2 \gtrless 4$ und $(a+d)^2 = 4$ zusammenfällt, und $f_i f_k = f_k f_i$ wird.

Eine *zweite* Methode wäre die, die noch ganz unbestimmte Anzahl von Constanten, welche in den Functionen $F_k(x)$ auftreten sollen, so zu bestimmen, dass der Radius des Gültigkeitskreises unserer Darstellung möglichst gross werde. Oder, wenn es sich um die Lösung einer Gleichung mit constanten Coefficienten handelt, sämmtliche α, bis auf eine gewisse Anzahl derselben, verschwinden zu lassen und nur so viel zurückzulassen, als nöthig ist, um es so einrichten zu können, dass für ein beliebiges, aber als bestimmt gewähltes $x = x_1$, innerhalb des betreffenden Gültigkeitskreises von $f(x)$ die n Gleichungen $\varphi_k(x_1) = A_k$, welche, wohl gemerkt, *in Bezug auf α linear* sind, bestehen, was offenbar immer möglich ist, wenn die gegebene Gleichung keine gleichen Wurzeln besitzt. Diese Methode wird an einigen Beispielen illustrirt werden.

Eine *dritte* Methode können wir in folgender Weise anwenden. Wir beweisen zunächst folgendes:

Lemma. Es giebt immer unendlich viele positive ganze Zahlen m, von denen mindestens eine zwischen 1 und $n!$ (inclusive) sich befindet und dann mindestens eine ganze Zahl h zwischen Null und $m - 1$, so dass die Congruenz

$$h_1 \frac{m}{n_1} + h_2 \frac{m}{n_2} + \cdots + h_\mathfrak{l} \frac{m}{n_\mathfrak{l}} \equiv h \pmod{m}$$

befriedigt wird, wenn $n_1, n_2, \cdots, n_\mathfrak{l}$ positive, ganze, von einander verschiedene Zahlen sind zwischen Eins und $n - 1$ und $n_1 \cdot n_2 \cdots n_\mathfrak{l} = m$ ist, während $h_1, h_2, \cdots, h_\mathfrak{l}$ ebenfalls positive ganze Zahlen sind, welche respective zwischen 0 und $n_1 - 1$, zwischen 0 und $n_2 - 1$, etc., bis endlich zwischen 0 und $n_\mathfrak{l} - 1$ enthalten sind, so dass $h_{\mathfrak{l}_1} = 0, 1, 2, \cdots, (n_{\mathfrak{l}_1} - 1)$, wenn $\mathfrak{l}_1 = 1, 2, \cdots, \mathfrak{l}$ bedeutet, im Uebrigen aber verschiedene $h_{\mathfrak{l}_1}$ auch gleiche Werthe haben können, von der Beschaffenheit, dass wenn man $n (n > 2)$ beliebige, aber von Null und Unendlich verschiedene Grössen

$$(\alpha) \qquad c_0, \; c_1, \; c_2, \; \cdots, \; c_{n-1}$$

successive multiplicirt, mit den Factoren

$$r_m^{h.0}, \; r_m^{h.1}, \; r_m^{h.2}, \; \cdots, \; r_m^{h.(n-1)},$$

unter den dadurch erhaltenen Grössen

$$(\beta) \qquad r_m^{0.h} c_0, \; r_m^{1.h} c_1, \; r_m^{2.h} c_2, \; \ldots \; r_m^{(n-1)h} c_{n-1}$$

keine zwei gleichen vorkommen.

Von der Richtigkeit dieser Behauptung kann man sich dadurch zu überzeugen suchen, dass man sich zunächst vorstellt, es seien zwischen den Grössen (α) k unter einander gleiche vorhanden (wären schon die gegebenen (α) *alle* von einander verschieden, so wären unsere gesuchten Zahlen $m = 1$ und $h = 0$ zu nehmen), so multiplicire man sämmtliche Elemente respective mit den Factoren r_n^0, r_n^1, r_n^2, $\ldots$, $r_n^{(n-1)}$; dann werden die k vorhin gleich gewesenen Elemente von einander verschieden werden; würden also vorhin *alle* Elemente einander gleich gewesen sein, so hätten wir unser Ziel schon erreicht und es wäre somit $m = n$ und $h = 1$. Ist aber $k < n$ und sollten nun jetzt unter den vorhin $n - k$ verschieden gewesenen Elementen manche auftreten, welche unter einander, oder paarweise gewissen unter jenen k Elementen gleich geworden sind (was dann und nur dann eintreten kann, wenn bei manchen der $(n - k)$ ursprünglich verschiedenen Elemente die Verschiedenheit darin bestand, dass sie bei gleichem Modul nur verschiedene Argumente besassen, und zwar so, dass der Quotient zweier eine n^{te} Einheitswurzel war), so beachte man den Umstand, dass bei μ-maliger Wiederholung der vorigen Operation, so lange nicht $\mu \equiv 0 \pmod{n}$ ist, die einmal gleich gewesenen Elemente immer verschieden bleiben müssen, da

$$r_n^{0.\mu}, \; r_n^{1.\mu}, \; r_n^{2.\mu}, \; \ldots, \; r_n^{(n-1)\mu}$$

unter der angegebenen Bedingung immer von einander verschieden sind. Nun kann es aber eintreten, dass die vor Ausübung der Operation gruppenweise gleichgewesenen Elemente nach geschehenen Multiplicationen zwar unter einander immer verschieden bleiben, jedoch gewisse Elemente der einen Gruppe immer gewissen Elementen irgend einer andern Gruppe beziehungsweise gleich werden; und zwar kann dieses abwechselnd geschehen, aber so, dass bei $(n - 1)$-maliger Wiederholung die Anzahl der gleichen Paare nicht ganz verschwindet.

Führt man aber jetzt eine analoge Operation aus, indem man r_{n_1} anstatt r_n nimmt, wobei n_1 eine der Zahlen zwischen Null und $n-1$ ist, so muss sich unbedingt die Zahl der gleichen Paare verringern, da auch jetzt die einmal gleich gewesenen und verschieden gewordenen Elemente bei h_1-maliger Wiederholung der Operation verschieden bleiben müssen, wenn nicht $h_1 \equiv 0 \pmod{n}$ ist. Fährt man so fort, so wird man einmal sämmtliche Elemente verschieden machen müssen, da die Anzahl der möglichen Operationen immer die Anzahl der möglichen gleichen Paare übertrifft. Gesetzt nun das Ziel wurde erreicht, nachdem mit $r_{n_1}^{h_1}$ und $r_{n_2}^{h_2}$, $r_{n_3}^{h_3}$, $\cdots$, $r_{n_l}^{h_l}$ multiplicirt wurde, wobei n_1, n_2, $\cdots$, n_l verschiedene ganze Zahlen zwischen Eins und n sind, so haben wir schon öfters gesehen, dass man

$$r_m^h = r_{n_1}^{h_1} \cdot r_{n_2}^{h_2} \cdots r_{n_l}^{h_l} = r_{n_1 . n_2 \ldots n_l}^{h_1 \frac{m}{n_1} + h_2 \frac{m}{n_2} + \cdots + h_l \frac{m}{n_l}}$$

setzen kann und alle ausgeübten Multiplicationen äquivalent sind einer einzigen mit r_m^h, wenn m und h die verlangte Bedeutung haben. Daraus ersieht man, dass m eine der ganzen Zahlen zwischen 1 und $n!$ sein wird. Durch folgende Betrachtung, durch welche der Satz in etwas andrer Gestalt erscheint, kann man noch die Grenzen für m bedeutend verringern. Man kann nämlich den Satz auch so aussprechen:

Sind n beliebige aber von Null und Unendlich verschiedene Grössen c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_{n-1} gegeben und bildet man aus ihnen die Determinante, welche bekanntlich das Product sämmtlicher Differenzen der Elemente c_0, $c_1 x$, $c_2 x^2$, $\ldots$, $c_{n-1} x^{n-1}$ darstellt, nämlich:

$$1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_0 & c_1 x & c_2 x^2 & \cdots & c_{n-1} x^{n-1} \\ c_0^2 & c_1^2 x^2 & c_2^2 x^4 & \cdots & c_{n-1}^2 x^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0^{n-1} & c_1^{n-1} x^{n-1} & c_2^{n-1} x^{2(n-1)} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} x^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

so kann man immer eine ganze Zahl m zwischen 1 *und* $n!$

und mindestens eine solche Zahl h zwischen 0 *und* $m-1$ *derartig bestimmen, dass die Gleichung*

$$2)\qquad \varDelta = 0$$

durch $x = r_m^h$ *nicht befriedigt wird.*

Beweis. Die nach Potenzen x geordnete Gleichung (2) hat offenbar die Form

$$3)\qquad C_{\mu+\lambda}x^{\mu+\lambda} + C_{\mu+\lambda-1}x^{\mu+\lambda-1} + \cdots + C_\lambda x^\lambda = 0,$$

wobei die C ganze rationale Functionen von $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ sind, deren Dimension constant $= \frac{n(n-1)}{2}$, während deren Gewicht verschieden ist und zwar übereinstimmend mit dem betreffenden Exponenten von dem zugehörigen x. (Vgl. Cap. I § 5.) Dabei besitzt $C_{\mu+\lambda}$ das grösstmögliche und C_λ das kleinstmögliche Gewicht unter den Gliedern der ausgerechneten Determinante

$$\varDelta_{(x=1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0^{n-1} & c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Nun erreicht aber offenbar das n Maximum des Gewichtes $G_{\mu+\lambda}$ kein anderes Glied als das der ersten Hauptdiagonale

$$G_{\mu+\lambda} = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3!}$$

und kein anderes Glied als das der sogenannten zweiten Diagonale besitzt das Minimum des Gewichts, nämlich

$$G_\lambda = 0(n-1) + 1(n-2) + 2(n-3) + \cdots + (n-2)1 + (n-1)0 = \binom{n}{3},$$

so dass

$$\mu + \lambda = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3!}$$

und

$$\lambda = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

ist. Da es sich nun aber darum handelt, ob eine gewisse Einheitswurzel, welche doch jedenfalls von Null verschieden ist, anstatt x gesetzt werden kann, so kann man die Gleichung (3) durch x^λ dividiren und man erhält die Gleichung μ^{ten} Grades

4) $\varphi(x) = C_{\mu+\lambda} x^\mu + C_{\mu+\lambda-1} x^{\mu-1} + \cdots + C_{\lambda+1} x + C_\lambda = 0.$

Setzt man nun anstatt x in der linken Seite von (4) $r_m^h x$, multiplicirt dann die ganze Gleichung mit $r_m^{-i.h}$, lässt h die Werthe $0, 1, 2, \cdots, (m-1)$ durchlaufen und addirt sämmtliche m so entstandenen Gleichungen, so erhält man die i^{te} Partialfunction m^{ter} Classe von (4), welche unter der Voraussetzung $m > \mu$ aus einem einzigen Gliede bestehen wird: $\varphi_{m,i}(x) = C_{i+\lambda} \cdot x^i$. Würde nun $\varphi(r_m^h) = 0$ für alle möglichen h befriedigt werden, so wäre auch für jedes beliebige i

$$\sum_0^{n-1} {}^h r_m^{-i'h} \varphi(r_m^h) = \underset{m,i}{\varphi(1)} = C_{i+\lambda} = 0,$$

(in der gewöhnlichen Ausdrucksweise würde das bekanntlich heissen: in einer Gleichung μ^{ten} Grades, welche mehr als μ Wurzeln hat, müssen sämmtliche Coefficienten identisch Null sein) und man bekäme so $\mu + 1$ Gleichungen zur Bestimmung der c, aus welchen $\binom{n}{n-1} = n$ Gleichungen sich ergeben, welche aussagen, dass das Product irgend welcher $n-1$ von den n Grössen identisch Null sei, woraus folgt, dass mindestens zwei der c Null sind, was gegen unsere Voraussetzung ist.

Für unsern Zweck reicht schon eine der zwei Gleichungen

$$C_{\mu+\lambda} = c_1 c_2^2 c_3^3 \quad \cdots c_{n-1}^{n-1} = 0,$$

$$C_\lambda \quad = c_0^{n-1} c_1^{n-2} \cdots c_{n-2} = 0,$$

da wir eigentlich im Stande sind auch den Fall, dass nur eine der Grössen Null wäre, auszuschliessen. Sollen aber die c von Null verschieden sein, so muss mindestens für *einen* Werth von i die Gleichung $\varphi(r_m^i) = 0$ unrichtig sein, was zu beweisen war.

Ueber m machen wir dabei die *einzige* Voraussetzung

$$m > \mu = \frac{n(n-1)[(2n-1)-(n-2)]}{3!} = \binom{n+1}{3},$$

elche Zahl jedenfalls kleiner ist als $(n!)$, sobald nur $n \geqq 2$ i, wie wir auch behauptet haben. Man kann aber sofort s en, dass sobald $n \geqq 3$ ist, die Zahl μ sogar kleiner als $n(n-1)(n-2)$ ist, weil nämlich dann

$$\frac{n+1}{6} < n-2$$

ird, und zwar steigt dieser Unterschied mit wachsenden n, ie man leicht ersieht, wenn man diese Ungleichung in er Form

$$5(n+1) > 18$$

schreibt. Ebenso sieht man, dass für

$$n \geqq 4, \quad \mu < n(n-1)(n-3),$$

denn es ist dann $5n > 19$; allgemein für $n \geqq p$ ist

$$\mu < n(n-1)(n-p+1),$$

auf Grund von $5(n+1) > 6p$, so lange nur $p < 5$ ist. Für $p = 5$ würde $\mu < n(n-1)(n-p+1)$ nur noch für $n > p$ gelten. Dagegen kann allgemein gesagt werden, dass schon für

$$m = n(n-1)(n-p+1)$$

unser Satz gültig ist, sobald $n \geqq 2p-1$ und $4p+5 > 0$ ist. (Streng genommen ist die Bedingung für diese untere Grenze von m genauer $n+1 > \frac{6}{5}p$; für jedes grössere m gilt unser Satz um so mehr.)

Für unsern weitern Zweck ist es nützlich *erstens* die Zahl m so klein als möglich zu nehmen und *zweitens* sie so zu wählen, dass man sie zerlegen kann in Factoren, welche kleiner oder höchstens einer von ihnen gleich n, die aber *relativ prim* zu einander werden. Für die ersten 10 aufeinander folgenden Werthe von n könnte man z. B. folgendermassen bestimmen:

n	$\mu = \binom{n+1}{3}$	$m > \mu$	besteht aus den Factoren
2	1	2	2 . 1
3	4	6	3 . 2
4	10	12	4 . 3
5	20	20*	5 . 4*
6	35	60	5 . 4 . 3
7	56	60	5 . 4 . 3
8	84	84	7 . 4 . 3
9	120	$\left.\begin{matrix}126\\120\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}9.7.2\\8.5.3\end{matrix}\right.$
10	165	168	8 . 7 . 3
11	220	231	11 . 7 . 3
			welche relativ prim sind

Man sieht leicht, dass man es ebenso oder richtiger gesagt, um so eher können wird, wenn n immer mehr wächst, weil dann die Anzahl der möglichen Factoren, welche relativ prim zu einander und kleiner als n sind, immer grösser wird.

Beispiel 1. Für $n = 2$; $\mu = \binom{3}{3} = 1$, also $m = 1, 2$ und $h = 0, 1$. In der That, würde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_0 & r_2^h \end{vmatrix} = 0$$

für beide möglichen Werthe von $h = 0, 1$ befriedigt werden, so würde aus $c_0 + c_1 = 0$ und $c_0 - c_1 = 0$, folgen $c_0 = 0$ und $c_1 = 0$. Für jeden gegebenen Fall kann man also einen der beiden möglichen Werthe für h wählen, welcher c_0 und $r_2^h c_1$ von einander verschieden macht.

Beispiel 2. Für $n = 3$ ist $\lambda = \binom{3}{3} = 1$, $\mu = \binom{3+1}{3} = 4$, es ist also genug $m = 5 < 3!$ zu nehmen; indess nehmen wir $m = 6$, weil 5 nicht zerlegbar ist in Factoren, welche nicht grösser als 3 sind.

Sollte nun

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_0 & r_6^h c_1 & r_6^{2h} c_2 \\ c_0^2 & r_6^{2h} c_1^2 & r_6^{4h} c_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, die nach r_6^h entwickelte Gleichung (nachdem dieselbe durch $r_6^\lambda = r_6^1$ dividirt wurde)

$$c_1{}^1 c_2{}^2 (r_6^h)^4 - (c_2 c_1{}^2 + c_2{}^2 c_0{}^1)(r_6^h)^3 + (c_0 c_1{}^2 + c_0{}^2 c_2)(r_6^h) - c_0{}^2 c_1 = 0$$

für alle möglichen h verschwinden, so müsste jedes Glied verschwinden, woraus die $\binom{3}{2}$ Gleichungen sich ergäben:

$$c_0 c_1 = 0; \quad c_0 c_2 = 0; \quad c_1 c_2 = 0,$$

woraus folgen würde, dass mindestens zwei unter diesen Grössen Null sein müssen. Mithin sind mindestens für einen Werth von h die Grössen

$$c_0,\ r_6^h c_1,\ r_6^{2h} c_2,\ \ldots,\ r_6^{(n-1)h} c_{n-1}$$

sämmtlich von einander verschieden.

Beispiel 3. Für $n = 4$ ist $\lambda = 4$, $\mu = \binom{4+1}{3} = 10$, und man hat $m = 12 = 4 \cdot 3$ und die Gleichung (4) lautet:

$$c_1{}^1 c_2{}^2 c_3{}^3 (r_{12}^h)^{10} \left.\begin{array}{l} - c_1{}^1 c_2{}^3 c_3{}^2 \\ - c_1{}^2 c_2{}^1 c_3{}^3 \\ - c_0{}^1 c_2{}^2 c_3{}^3 \end{array}\right| (r_{12}^h)^9 + c_0{}^1 c_2{}^3 c_3{}^2 (r_{12}^h)^8 \left.\begin{array}{l} + c_1{}^3 c_2{}^1 c_3{}^2 \\ + c_0{}^2 c_2{}^1 c_3{}^3 \\ + c_0{}^1 c_1{}^2 c_3{}^3 \\ + c_1{}^2 c_2{}^3 c_3{}^1 \end{array}\right| (r_{12}^h)^7$$

$$\left.\begin{array}{l} - c_1{}^3 c_2{}^2 c_3{}^1 \\ - c_0{}^2 c_1{}^1 c_3{}^3 \end{array}\right| (r_{12}^h)^6 \left.\begin{array}{l} - c_0{}^1 c_1{}^3 c_3{}^2 \\ - c_0{}^2 c_2{}^3 c_3{}^1 \end{array}\right| (r_{12}^h)^5 \left.\begin{array}{l} - c_0{}^3 c_2{}^1 c_3{}^2 \\ - c_0{}^1 c_1{}^2 c_2{}^3 \end{array}\right| (r_{12}^h)^4 \left.\begin{array}{l} + c_0{}^3 c_2{}^2 c_3{}^1 \\ + c_0{}^1 c_1{}^3 c_2{}^2 \\ + c_0{}^2 c_1{}^1 c_2{}^3 \\ + c_0{}^3 c_1{}^1 c_3{}^2 \end{array}\right| (r_{12}^h)^3$$

$$+ c_0{}^2 c_1{}^3 c_3{}^1 (r_{12}^h)^2 \left.\begin{array}{l} - c_0{}^2 c_1{}^3 c_2{}^1 \\ - c_0{}^3 c_1{}^2 c_3{}^1 \\ - c_0{}^3 c_1{}^1 c_2{}^2 \end{array}\right| (r_{12}^h) + c_0{}^8 c_1{}^2 c_2{}^1 = 0.$$

Sollte diese Gleichung für alle möglichen h befriedigt werden und somit jeder der Coefficienten für sich verschwinden, so würden sich aus dem letzten und drittletzten, aus dem dritten und ersten Coefficienten, wie behauptet wurde, die $\binom{n}{n-1} = \binom{4}{3} = 4$ Gleichungen ergeben

$$c_0 c_1 c_2 = 0; \quad c_0 c_1 c_3 = 0; \quad c_0 c_2 c_3 = 0; \quad c_1 c_2 c_3 = 0,$$

wodurch die übrigen Coefficienten dann von selbst verschwinden.

Nicht ganz ohne Interesse scheinen folgende zwei Be-Bemerkungen.

Erstens erinnert die Form dieser Gleichungen an die Elemente unserer Determinante Δ in Abschnitt II, Capitel IV, §§ 32, 33, von welcher wir dort nachgewiesen haben, dass sie ebenfalls das Product sämmtlicher Differenzen darstellt. In der That könnte man unseren Satz auf jene Determinante anwenden und der Beweis wäre viel einfacher durch Multiplication der Determinanten mit r_m^{-ih} und Addition derselben zu erreichen. Wir zogen aber hier den obigen Weg deshalb vor, weil er sich einerseits an die andern Betrachtungen über das Gewicht und die Dimension etc. gut anschliesst, und weil auch dabei manche Eigenschaft in Betreff der Form in's Auge springt, auf welche wir übrigens später zurückzukommen Gelegenheit haben werden.

Zweitens lässt sich ganz analog eine Betrachtung anstellen an ähnlichen Determinanten, bei welchen das Gewicht eines Gliedes durch die Summe der Producte je beider Indices der Elemente definirt werde, so dass die *einen* Indices, die ersten oder die zweiten, die Dimension angeben; auch daraus werden wir später Nutzen zu ziehen suchen, jetzt kehren wir zu unserer Aufgabe zurück.

Im vierten Capitel des dritten Abschnittes haben wir ein System von n cyklischen Gleichungen n^{ten} Grades so definirt, dass die $\mathfrak{l}^{\text{te}}$ derselben

$$z_{\mathfrak{l}}^n + \varphi_{n-1,\mathfrak{l}}(x)\, z_{\mathfrak{l}}^{n-1} + \varphi_{n-2,\mathfrak{l}}(x)\, z_{\mathfrak{l}}^{n-2} + \cdots + \varphi_{1,\mathfrak{l}}(x)\, z_{\mathfrak{l}} + \varphi_{0,\mathfrak{l}}(x) = 0$$
$$\mathfrak{l} = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

die Wurzeln

$$r_n^{-\mathfrak{l}.0} c_0, \; r_n^{-\mathfrak{l}.1} c_1, \; r_n^{-\mathfrak{l}.2} c_2; \ldots; r_n^{-\mathfrak{l}(n-1)} c_{n-1}$$

besitzt. In ganz derselben Weise wie dort lässt sich nun ein System von n_1 Gleichungen n^{ten} Grades, worin $r_n^{h\mathfrak{l}}$ durch $r_{n_1}^{h\mathfrak{l}_1}$ ersetzt wird ($\mathfrak{l}_1 = 0, 1, 2, \ldots, n_1 - 1$) behandeln, wobei $n_1 < n$ und n_1 relativ prim zu n ist und wobei diesem zweiten Systeme eine jener n Gleichungen z. B. die nullte zu Grunde gelegt wird. Hier wie dort ist die Bildung aller Gleichungen des Systemes durch die der *einen* derselben vollkommen bestimmt, und alle Gleichungen des Systems sind gelöst, sobald eine derselben es ist. Da aber sowohl das System n als auch das System n_1 *eine* und dieselbe Gleichung (für $\mathfrak{l} = 0$, resp. $\mathfrak{l}_1 = 0$) besitzt, so ist die Construction und Lösung aller Gleichungen beider Systeme gegeben, sobald die irgend *einer* Gleichung beider Systeme bekannt ist. Es ist klar, dass man ebenso irgend eine andere Gleichung (die $\mathfrak{l}^{\text{te}}$) dem Systeme n_1 zu Grunde legen kann, und so $n \cdot n_1$ Gleichungen bekommen und dass man so auch weiter fortsetzen kann, und alle ($n!$) Gleichungen würden bestimmt sein, sobald *eine* Gleichung von ihnen bestimmt wird. Offenbar würde man aber jenes System von $n \,.\, n_1$ Gleichungen auch erhalten, wenn man von vornherein $r_{n.n_1}$ anstatt r_n genommen hätte. Es sei nun eine Gleichung mit den Coefficienten $\psi(x)$ gegeben, die so beschaffen sind, dass $f(x)$ durch ihre circumplexen Functionen c_k für solche x, welche in das Gebiet der verschiedenen c_k gehören, sämmtliche Wurzeln liefern. Hat man nun eine Gleichung zu lösen, welche gleiche Wurzeln besitzt, so bilde man aus derselben jene $m > \mu = \binom{n+1}{3}$ Gleichungen in oben ausgeführter Weise. Eine unter ihnen wird aber sicher lauter verschiedene Wurzeln besitzen und mit Hilfe jener Darstellung der Wurzeln lösbar sein; mit ihr werden aber zu gleicher Zeit alle übrigen Gleichungen gelöst sein.

§ 11.

Angabe einer Darstellung in der Umgebung irgend eines Verzweigungspunktes mit Hilfe einer cofunctionalen Interpolation.

a) Eine *vierte* Methode wird darin bestehen, dass eine ganz analoge Darstellung, wie die obige, direct für die Um-

gebung eines Verzweigungspunktes gebildet werde. Wir haben bis jetzt nur Cofunctionen von Potenzreihen, welche nach ganzen positiven Potenzen fortschreiten, behandelt; indess sind aber die Fundamentalsätze, die als Grundlage zur Theorie der Cofunctionen genommen wurden, an jene Beschränkung durchaus nicht gebunden, sondern es gelten dieselben, wie wir bald sehen werden, auch für Reihen mit positiven und negativen ganzen Potenzen sowohl, als auch für Reihen mit gebrochenen Exponenten. Und diese völlige Unabhängigkeit jener identischen Fundamentalsätze von der eigentlichen anderweitigen Beschaffenheit sowohl der Coefficienten als auch zum Theil der Exponenten der Reihen, wofern die Reihen überhaupt convergent sind, lässt es, glaube ich, erwarten, dass diese Fundamentalsätze wirklich eine Grundlage zu einer Theorie zu bilden fähig sind; und dieses um so mehr, seitdem in der neueren Zeit (insbesondere durch Weierstrass) die Potenzreihen bekanntlich als Grundlage zur Theorie der analytischen Functionen überhaupt aufgefasst worden sind. Diese Behauptung bewahrheitet sich nun deshalb zu allererst in Bezug auf algebraische Functionen, weil jene Fundamentalsätze die symmetrischen Functionen der Cofunctionen betreffen. Weil aber die Wurzeln algebraischer Functionen auch Potenzreihen mit negativen oder gebrochenen Exponenten sein können, so müssen wir zuerst nachweisen, dass die Gesetze der Cofunctionen auch auf diesem Gebiete ebenso wie bisher gelten, wenn wir sie als Ausgangspunkt nehmen sollen. Dieses soll im Folgenden angebahnt werden.

Was nun die Gültigkeit für Reihen mit negativen, aber ganzen Exponenten betrifft, so ist diese selbstverständlich, da der Ausgangspunkt für jene Gesetze der bekannte Satz war, dass die Summe gleich hoher k^{ter} Potenzen der n^{ten} Einheitswurzeln, s_k, nur zwei mögliche Werthe annehmen kann, entweder n oder Null, je nachdem k durch n theilbar ist oder nicht. Weil aber dieser Satz auch für negative k besteht, so ist dann alles Weitere, welches nur eine Reihe von Folgerungen aus jenem Satze bildet, auch für Reihen mit negativen Exponenten in dem Gebiete, wo sie brauchbar sind, gültig. Wir wenden uns nun zu den Reihen mit gebrochenen Exponenten und wollen nachweisen, dass dieselben

mit denen ganzer Exponenten *cofunctional*, wenn man so sagen darf, zusammenhängen.

b) Wir wissen, wie man aus einer gegebenen Function die n Cofunctionen n^{ter} Classe bildet, aus diesen, wenn dieselben als Hauptfunctionen aufgefasst werden, von Neuem n_1 Cofunctionen n_1^{ter} Classe u. s. f., und wie die so successive mehrfach wiederholten Operationen durch ein directes Verfahren ersetzt werden können, was wir an anderer Stelle unter der Benennung „*Subordinirte Cofunctionen*" behandelt haben. Die Umkehrung dieser Operationen wird diejenige Operation sein, mittelst welcher zu einer gegebenen Function $f(x)$ diejenige Function $\psi(x)$ aufgefunden werden soll, von welcher die gegebene $f(x)$ eine i^{te} Partialfunction n^{ter} Classe sei. In der Regel führen die umgekehrten Operationen auf gewisse Unbestimmtheiten einerseits und auf Erweiterungen der ursprünglichen Begriffe und Definitionen andrerseits. Auch hier ist dieses der Fall. Nur unterscheiden sich hier wesentlich die circumplexen und die Partialfunctionen von einander. Für die ersteren ist die Aufgabe sofort bestimmt. Um nämlich $\psi(x)$ zu finden, aus der eine gegebene h_1^{te} circumplexe Function n_1^{ter} Classe $f(r_{n_1}^{h_1}x)$ in ihrem ganzen Convergenzgebiete eine h^{te} circumplexe Function n^{ter} Classe werde, braucht man nur in der verlangten Bedingungsgleichung

$$1)\qquad \psi(r_n^h x) = f(r_{n_1}^{h_1} x)$$

die $(-h)^{\text{te}}$ circumplexe Function n^{ter} Classe zu bilden, d. h. in beiden Seiten der Gleichung $r_n^{-h}x$ anstatt x zu setzen, und man bekommt die Lösung

$$2)\qquad \psi(x) = f\left(r_n^{h_1} r_n^{-h} x\right) = f\left(r_{nn_1}^{nh_1 - n_1 h} x\right) = f\left(r_{n_1}^{h'} x\right).^{*)}$$

Würde nun eine andere Function $\psi_1(x)$ ebenfalls eine Lösung der Aufgabe sein, so würde aus

---

*) Ich habe an anderer Stelle den leicht zu führenden Beweis gegeben, dass man in r_n^h den Classenindex n und den Ordinalindex h mit einer und derselben Zahl m zugleich multipliciren darf; es kann dann $r_{m.n}^{m.h}$ wiederum als die $(m \cdot h)^{\text{te}}$ Potenz einer *primitiven* Wurzel betrachtet werden von $x^{mn} - 1 = 0$, falls r_n^h die h^{te} Potenz einer primitiven Wurzel von $x^n - 1 = 0$ war.

$$\psi_1\left(r_n^h\, x\right) = f\left(r_{n_1}^{h_1}\, x\right)$$

folgen, dass innerhalb des Convergenzgebietes von $f(x)$

$$3)\qquad \psi_1\left(r_n^h\, x\right) = \psi\left(r_n^h\, x\right)$$

sei; und die Bedingung der absoluten Gültigkeit würde (für die absoluten Werthe von x) somit ausreichen, die Lösung der Aufgabe *eindeutig* zu bestimmen.

c) Handelt es sich aber um die Auffindung derjenigen Function $\psi(x)$, von der eine gegebene i^{te} Partialfunction n^{ter} Classe, $f_{n,i}(x)$, eine j^{te} Partialfunction m^{ter} Classe werde, so ist dieses nicht so einfach, wie im obigen Falle. Schon in dem ganz speciellen Falle, wo zufällig $f_{n,i}(x)$ selbst eine solche Potenzreihe ist, deren Exponenten die Congruenz $\varepsilon \equiv j \pmod{m}$ erfüllen, also wo $n = m$ und $i = j$, d. h. wo die gegebene Function die Form

$$4)\qquad f_{n,i}(x) = f_{m,j}(x) = a_j\, x^j + a_{m+j}\, x^{m+j} + a_{2m+j} x^{2m+j} + \cdots$$

hat, würde unserer Aufgabe jede Function

$$5)\qquad \psi(x) = A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \cdots$$

genügen, in welcher nur diejenigen A, deren Indices mit denen von a in $f_{m,j}(x)$ übereinstimmen, den entsprechenden a gleich zu sein brauchen, also

$$6)\qquad A_{pm+j} = a_{pm+j};$$

alle übrigen A können aber vollkommen willkürlich bleiben, wenn sie nur so beschaffen sind, dass $\psi(x)$ in demselben Gebiete wie $f_{m,j}(x)$ convergirt. (Ja es ist sogar eigentlich nur nöthig, dass $\psi(x)$ überhaupt in irgend einem Gebiete absolut convergent sei; dieses würde schon genügen, um $r_m^h\, x$ anstatt x zu setzen, die Function mit r_m^{-jh} zu multipliciren und die Summe nach $h = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ zu nehmen; diese Summe würde dann mit $f_{m,j}(x)$ identisch sein, sobald die Bedingungsgleichung (6) erfüllt ist.) Mit andern Worten: Die Bestimmung einer j^{ten} Partialfunction m^{ter} Classe einer Function $\psi(x)$ lässt noch eine sehr weite Unbestimmtheit für die $(m-1)$ übrigen Partialfunctionen derselben m^{ten} Classe in $\psi(x)$ zurück.

Eine nähere Bestimmung kann man für die Lösung dieser Aufgabe dadurch herbeiführen, dass man verlangt, dass unter den Coefficienten jeder der übrigen Partialfunctionen ein Gesetz herrschen soll, welches mit dem Gesetze, das unter den Coefficienten der gegebenen j^{ten} Partialfunction herrscht, in gewissem, gegebenem, Zusammenhange steht. Ein specieller Fall davon würde folgender sein. Gesetzt es bestehe unter beliebigen $k+1$ aufeinander folgenden Coefficienten

$$a_{pm+j}, \quad a_{(p+1)m+j}, \quad a_{(p+2)m+j}, \cdots, a_{(p+k)m+j}$$

das Gesetz, welches die Bedingungsgleichung

$$7) \qquad \chi\left(a_{pm+j}, \quad a_{(p+1)m+j}, \cdots, a_{(p+k)m+j}\right) = 0$$

für beliebige ganzzahlige p befriedigt, so soll verlangt werden, dass unter den Coefficienten der übrigen $m-1$ Partialfunctionen dasselbe Gesetz stattfände, d. h. es soll die Gleichung (7) auch befriedigt werden, wenn man j irgend einen ganzzahligen Werth zwischen 0 und $m-1$ annehmen lässt. Würde nun 7) eine $\mathfrak{l}$-deutige Function sein, so würde man $\mathfrak{l}$ verschiedene Functionen $\psi(x)$ finden, welche die Aufgabe lösen; wir wollen sie $\mathfrak{l}$ *particuläre Totalfunctionen von* $f_{m,j}(x)$, *die betreffende Operation Totalisiren, im Gegensatz zum Partialisiren, nennen.*

d) So lange nun die gegebene Function eben eine solche Partialfunction schon ist, wie wir eben verlangen, dass sie aus $\psi(x)$ werde, d. h. so lange $n = m$; $i = j$, wird die gesuchte Totalfunction natürlich eine Reihe mit ganzen positiven Exponenten sein, wenn die gegebene Partialfunction eine solche ist. Anders kann es im allgemeinen Fall, wo $n \gtrless m$ und $i \gtrless j$ ist, werden. Nehmen wir zunächst an, es sei $n = 1$; $i = 0$; es ist also

$$8) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_p x^p + \cdots$$

gegeben, für welche Function die Gleichung 7) durch a_p, $a_{p+1}, \cdots, a_{p+k}$ befriedigt wird, und es werde ihre j^{te} Totalfunction m^{ter} Classe, d. h. diejenige Function $\psi(x)$ gesucht, deren j^{te} Partialfunction m^{ter} Classe mit $f(x)$ identisch ist und wobei $k+1$ aufeinander folgende Coefficienten einer jeden der übrigen $m-1$ Partialfunctionen von $\psi(x)$ ebenfalls $\chi = 0$ befriedigen.

Jedenfalls ist klar, dass keine Reihe mit ganzen Exponenten unsere Aufgabe lösen kann, da die Substitution von $r_m^h\, x$ anstatt x, die Multiplication mit r_m^{-jh} und Summirung nach h eine j^{te} Partialfunction m^{ter} Classe liefern würde, in welcher sämmtliche Coefficienten, deren Index nicht congruent ist $j\,(\text{mod.}\ m)$, identisch Null sind, was der Voraussetzung in (8) widerspricht. Es handelt sich also offenbar um eine Interpolation von je $(m-1)$ Gliedern mit gebrochenen Exponenten zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern der gegebenen Function $f(x)$. Bezeichnen wir auch für diese neuen Glieder die Coefficienten mit gleichen Buchstaben und mit Indices, welche den betreffenden Exponenten gleich sind, so erhalten wir für $j=0$ die gesuchte Totalfunction in der Form

$$\psi(x) = a_0 + a_{\frac{1}{m}}\, x^{\frac{1}{m}} + a_{\frac{2}{m}}\, x^{\frac{2}{m}} + \cdots$$

$$+ a_{\frac{m-1}{m}}\, x^{\frac{m-1}{m}} + a_1 x + a_{\frac{m+1}{m}}\, x^{\frac{m+1}{m}} + \cdots,$$

oder, kürzer bezeichnet,

$$\psi(x) = \sum_0^\infty{}^{q}\, a_{\frac{q}{m}}\, x^{\frac{q}{m}},$$

wobei alle a mit gebrochenen Indices so zu bestimmen sind, dass je $k+1$ derselben

$$a_{\frac{qm+j}{m}},\quad a_{\frac{(q+1)m+j}{m}},\quad a_{\frac{(q+2)m+j}{m}},\quad \cdots,\quad a_{\frac{(q+k)m+j}{m}},$$

welche ein constantes $j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ besitzen, für beliebige q die Gleichung (7) befriedigen.

Setzt man für einen Augenblick $x^{\frac{1}{m}} = \xi$; $\psi(x) = \varphi(\xi)$, so ist

$$\sum_0^{m-1}{}^{h}\, \varphi\left(r_m^h\, \xi\right) = \sum_0^\infty{}^{q}\, s_q \cdot a_{\frac{q}{m}} \cdot \xi^q,$$

wobei s_q die Summe der q^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln von $x^m - 1 = 0$ bedeutet. Nun verschwinden aber sämmtliche s_q identisch, mit Ausnahme derjenigen, für welche $q \equiv 0\,(\text{mod.}\ m)$, in welch letzterem Falle $s_q = m$ wird; folglich hat man

$$\sum_0^{m-1} {}^h \varphi\left(r_m^h \xi\right) = m \sum_0^{\infty} {}^p a_{\frac{pm}{m}} \xi^{pm} = m \sum_0^{\infty} {}^p a_p x^p;$$

es ist also wirklich

$$m \psi_{m,0}(x) = m f(x),$$

wie verlangt war. Diese Function $\psi(x)$, deren nullte Partialfunction m^{ter} Classe nun $f(x) = \sum_0^{\infty} {}^q a_q x^q$ ist, besitzt natürlich noch $m-1$ Partialfunctionen derselben Classe, welche die Form haben

$$\psi_{m,j_1}(x) = \sum_0^{\infty} {}^p a_{\frac{pm+j_1}{m}} x^{\frac{pm+j_1}{m}}; \quad (j_1 = 1, 2, \cdots, m-1);$$

also alle *gebrochene* Exponenten besitzen.

Eine ausführliche Behandlung dieser vierten Methode, welche zugleich den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungen, welche den verschiedenen Verzweigungspuncten entsprechen, liefern soll, wird in den weiteren Abschnitten folgen.

Viertes Capitel.

Durchgeführte Beispiele an den Gleichungen der ersten fünf Grade mit constanten Coefficienten.

§ 12.

Gleichungen ersten und zweiten Grades.

a) Ist $n = 1$, also die gegebene Gleichung

$$z + \varphi_0(x) = 0,$$

wobei $\varphi_0(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$ ist, so drückt die aus der obigen Theorie für $n = 1$ entspringende Thatsache der eindeutigen Bestimmung der Coefficienten von

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

durch die von $\varphi(x)$ nichts Anderes aus, als das bekannte Gesetz, dass in einem und demselben Convergenzgebiete nicht zwei Potenzreihen für unendlich viele Werthe von x dieselben Werthe von z annehmen können, wenn nicht alle Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in beiden respective gleich sind.

b) Sei nun $n = 2$, also die gegebene algebraische Function zweiten Grades nach z

$$F(z, x) = z^2 + \varphi_1(x)\, z + \varphi_0(x) = 0,$$

wobei in

$$\varphi_0(x) = \alpha_{0,0}^2 + \alpha_{0,2} x^2 + \alpha_{0,4} x^4 + \cdots + \alpha_{0,2q} x^{2q} + \cdots$$

$$\varphi_1(x) = 2\,[\alpha_{1,0} + \alpha_{1,2} x^2 + \alpha_{1,4} x^4 + \cdots + \alpha_{1,2q} x^{2q} + \cdots]$$

die Coefficienten α als gegebene Constanten so vorausgesetzt sind, dass sie entweder von einem gewissen Werthe von $q = q'$ ab alle weitern Null sind, so dass $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze rationale Functionen sind, oder, wenn sie unendliche Reihen sind, so sollen sie in einem gemeinschaftlichen Gebiete con-

vergiren. Nach der obigen Theorie ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten a in

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

so dass in der Umgebung von $x = 0$ für jeden Werth von x die zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x)$ und $f(-x)$ sein sollen. Nehmen wir an, dass wir es hier nicht mit der Reducente, sondern mit der vollständigen Gleichung zu thun haben, wo also $\varphi_1(x)$ und somit auch p_0 nicht identisch Null ist, so hat man:

$$(0)\quad 0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} - \varphi_0(x) = f_{2,0}(x)^2 - f_{2,1}(x)^2 - \varphi_0(x)$$
$$= (a_0^2 - \alpha_{1,0}^2) + (2a_0 a_2 - a_1^2 - \alpha_{0,2})\,x^2 +$$
$$+ (2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2 - \alpha_{0,4})\,x^4 +$$
$$+ (2a_0 a_6 - 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 - a_3^2 - \alpha_{0,6})\,x^6 +$$
$$+ (2a_0 a_8 - 2a_1 a_7 + 2a_2 a_6 - 2a_3 a_5 + a_4^2 - \alpha_{0,8})\,x^8 + \cdots$$

und zugleich

$$(1)\quad 0 = 2p_0 + \varphi_1(x) = 2f_{2,0}(x) + \varphi_1(x)$$
$$= 2\,[(a_0 + \alpha_{1,0}) + (a_2 + \alpha_{1,2})\,x^2 + (a_4 + \alpha_{1,4})\,x^4 +$$
$$+ (a_6 + \alpha_{1,6})\,x^6 + \cdots + (a_{2q} + \alpha_{1,2q})\,x^{2q} + \cdots,$$

welche für unendlich viele Werthe von x erfüllt werden sollen, so dass jeder Coefficient für sich allein verschwinden muss. Aus der letzten Gleichung bestimmen sich alle a mit geraden Indices direct, nämlich:

$$a_{2q} = -\alpha_{1,2q}.$$

[Ebenso wie sich im allgemeinen Falle diejenigen a, deren Indices congruent sind Null nach dem Modul n, direct bestimmen, nämlich $a_{nq} = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1,nq}$.] Was nun die a betrifft, deren Indices congruent sind *Eins* (mod. 2), so folgt aus der Gleichung (0)

$$a_0^2 - \alpha_{1,0}^2 = 0;\ 2a_0 a_2 - a_1^2 - \alpha_{0,2} = 0;\ 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 - \alpha_{0,4} = 0;$$
$$2a_0 a_6 - 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 - a_3^2 - \alpha_{0,6} = 0;$$
$$2a_0 a_8 - 2a_1 a_7 + 2a_2 a_6 - 2a_3 a_5 + a_4^2 - \alpha_{0,8} = 0;\ \text{etc.}$$

Viertes Capitel.

Durchgeführte Beispiele an den Gleichungen der ersten fünf Grade mit constanten Coefficienten.

§ 12.

Gleichungen ersten und zweiten Grades.

a) Ist $n = 1$, also die gegebene Gleichung

$$z + \varphi_0(x) = 0,$$

wobei $\varphi_0(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$ ist, so drückt die aus der obigen Theorie für $n = 1$ entspringende Thatsache der eindeutigen Bestimmung der Coefficienten von

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

durch die von $\varphi(x)$ nichts Anderes aus, als das bekannte Gesetz, dass in einem und demselben Convergenzgebiete nicht zwei Potenzreihen für unendlich viele Werthe von x dieselben Werthe von z annehmen können, wenn nicht alle Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in beiden respective gleich sind.

b) Sei nun $n = 2$, also die gegebene algebraische Function zweiten Grades nach z

$$F(z, x) = z^2 + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0,$$

wobei in

$$\varphi_0(x) = \alpha_{0,0}^2 + \alpha_{0,2} x^2 + \alpha_{0,4} x^4 + \cdots + \alpha_{0,2q} x^{2q} + \cdots$$

$$\varphi_1(x) = 2\,[\alpha_{1,0} + \alpha_{1,2} x^2 + \alpha_{1,4} x^4 + \cdots + \alpha_{1,2q} x^{2q} + \cdots]$$

die Coefficienten α als gegebene Constanten so vorausgesetzt sind, dass sie entweder von einem gewissen Werthe von $q = q'$ ab alle weitern Null sind, so dass $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze rationale Functionen sind, oder, wenn sie unendliche Reihen sind, so sollen sie in einem gemeinschaftlichen Gebiete con-

vergiren. Nach der obigen Theorie ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten a in

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

so dass in der Umgebung von $x = 0$ für jeden Werth von x die zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x)$ und $f(-x)$ sein sollen. Nehmen wir an, dass wir es hier nicht mit der Reducente, sondern mit der vollständigen Gleichung zu thun haben, wo also $\varphi_1(x)$ und somit auch p_0 nicht identisch Null ist, so hat man:

$$(0)\quad 0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} - \varphi_0(x) = f_{2,0}(x)^2 - f_{2,1}(x)^2 - \varphi_0(x)$$
$$= (a_0^2 - \alpha_{1,0}^2) + (2a_0 a_2 - a_1^2 - \alpha_{0,2})\, x^2 +$$
$$+ (2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2 - \alpha_{0,4})\, x^4 +$$
$$+ (2a_0 a_6 - 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 - a_3^2 - \alpha_{0,6})\, x^6 +$$
$$+ (2a_0 a_8 - 2a_1 a_7 + 2a_2 a_6 - 2a_3 a_5 + a_4^2 - \alpha_{0,8})\, x^8 + \cdots$$

und zugleich

$$(1)\quad 0 = 2p_0 + \varphi_1(x) = 2f_{2,0}(x) + \varphi_1(x)$$
$$= 2\,[(a_0 + \alpha_{1,0}) + (a_2 + \alpha_{1,2})\, x^2 + (a_4 + \alpha_{1,4})\, x^4 +$$
$$+ (a_6 + \alpha_{1,6})\, x^6 + \cdots + (a_{2q} + \alpha_{1,2q})\, x^{2q} + \cdots,$$

welche für unendlich viele Werthe von x erfüllt werden sollen, so dass jeder Coefficient für sich allein verschwinden muss. Aus der letzten Gleichung bestimmen sich alle a mit geraden Indices direct, nämlich:

$$a_{2q} = -\alpha_{1,2q}.$$

[Ebenso wie sich im allgemeinen Falle diejenigen a, deren Indices congruent sind Null nach dem Modul n, direct bestimmen, nämlich $a_{nq} = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1,nq}$.] Was nun die a betrifft, deren Indices congruent sind *Eins* (mod. 2), so folgt aus der Gleichung (0)

$$a_0^2 - \alpha_{1,0}^2 = 0;\ 2a_0 a_2 - a_1^2 - \alpha_{0,2} = 0;\ 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 - \alpha_{0,4} = 0;$$
$$2a_0 a_6 - 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 - a_3^2 - \alpha_{0,6} = 0;$$
$$2a_0 a_8 - 2a_1 a_7 + 2a_2 a_6 - 2a_3 a_5 + a_4^2 - \alpha_{0,8} = 0;\ \text{etc.}$$

Daraus folgt:

$$a_1^2 = 2\alpha_{1,0}\,\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2}; \qquad a_3 = \frac{\alpha_{1,2}^2 + 2\alpha_{1,0}\,\alpha_{1,4} - \alpha_{0,4}}{2a_1};$$

$$a_5 = \frac{2\alpha_{1,0}\,\alpha_{1,6} + 2\alpha_{1,2}\,\alpha_{1,4} - \alpha_{0,6} - a_3^2}{2a_1};$$

$$a_7 = \frac{2\alpha_{1,0}\alpha_{1,8} + 2\alpha_{1,2}\,\alpha_{1,6} + \alpha_{1,4}^2 - \alpha_{0,8} - 2a_3 a_5}{2a_1};$$

$$a_9 = \frac{2\alpha_{1,0}\alpha_{1,10} + 2\alpha_{1,2}\,\alpha_{1,8} + 2\alpha_{1,4}\,a_{1,6} - \alpha_{0,10} - 2a_3\,a_7 - a_5^2}{2a_1}$$

etc. und allgemein

$$a_{2q+1} = \frac{1}{2a_1}\Big[2\,(\alpha_{1,0}\;\alpha_{1,2(q+1)} + \alpha_{1,2}\,\alpha_{1,2q} + \cdots$$

$$+\,\alpha_{1,2E\left(\frac{q}{2}\right)}\,\alpha_{1,2E\left(\frac{q+3}{2}\right)}) + \left(E\left(\frac{q+1}{2}\right) - \frac{q}{2}\right)\alpha_{1,q+1}^2 - \alpha_{0,2(q+1)}$$

$$-\,2\,(a_3\,a_{2q-1} + a_5\,a_{2q-3} + \cdots + a_{2E\left(\frac{q-1}{2}\right)+1}\,a_{2E\left(\frac{q+2}{2}\right)+1} +$$

$$\left(E\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{q-1}{2}\right)a_{q+1}^2\Big],$$

worin nur solche a vorkommen, welche aus niedrigern Werthen von q bereits bestimmt werden. Es ist nicht schwer, diese Werthe wirklich successive einzusetzen und eine independente Formel aufzustellen; indess wird diese Recursionsformel durch ihre Uebersichtlichkeit einen Vorzug haben*).

Somit ist jeder Coefficient a mit ungeradem Index durch die vorhergehenden a mit kleinern Indices eindeutig *bestimmt*, mit einziger Ausnahme von a_1, zu dessen Bestimmung eine binomische quadratische Gleichung

---

*) Es ist vielleicht der Erwähnung nicht unwerth, dass die Schreibweise mit Hilfe der Factoren $\left[E\left(\frac{q+1}{2}\right) - \frac{q}{2}\right]$ respective $\left[E\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{q-1}{2}\right]$, welche (vgl. Einleitung am Schlusse von § 1) so eingerichtet sind, dass wenn
q eine gerade Zahl ist, der erste Null und der zweite $\frac{1}{2}$ und wenn
q „ ungerade „ „ „ „ $\frac{1}{2}$ „ „ „ Null wird, sich in vielen Fällen nicht bloss zur Abkürzung der Ausdrücke (hätten wir doch hier z. B. vier verschiedene Fälle sonst unterscheiden müssen) empfiehlt, sondern auch in der Zahlentheorie vortheilhaft sein kann.

$$a_1^2 = 2\alpha_{1,0}\,\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2}$$

vorhanden ist; während die a mit geraden Indices direct durch die entsprechenden α *alle* eindeutig gegeben sind. (Die einzige scheinbare Zweideutigkeit, welche aus (0) sich für a_0 in der Form $a_0^2 - \alpha_{1,0}^2 = 0$ noch bestehen könnte, ist durch die für dieselbe Grösse aus (1) sich ergebende simultane Gleichung $a_0 + \alpha_{1,0} = 0$ beseitigt; was bei a_1 nicht der Fall ist.)

c) In dem speciellen Falle der Reducente ist

$$\varphi_1(x) = -p_0 = 0,$$

d. h. alle Coefficienten a mit geraden Indices sind Null, und man hat:

$$(0') \quad 0 = p_1^2 + \varphi_0(x) = (a_1^2 + \alpha_{0,2})\,x^2 + (2a_1a_3 + \alpha_{0,4})x^4 + \\ + (2a_1a_5 + a_3^2 + \alpha_{0,6})\,x^6 + (2a_1a_7 + 2a_3a_5 + \alpha_{0,8})x^8 + \\ + (2a_1a_9 + 2a_3a_7 + a_5^2 + \alpha_{0,10})\,x^{10} + \cdots,$$

woraus die Bestimmungsgleichungen die einfachere Form

$$a_1^2 = -\alpha_{0,2}\,; \quad a_3 = -\frac{\alpha_{0,4}}{2a_1}\,; \quad a_5 = -\frac{\alpha_{0,4}^2 + 4\alpha_{0,2}\,\alpha_{0,6}}{(2a_1)^3}\,;$$

$$a_7 = -2\,\frac{\alpha_{0,4}^3 + 4\alpha_{0,2}\,\alpha_{0,4}\,\alpha_{0,6} + 8\alpha_{0,2}^2\,\alpha_{0,8}}{(2a_1)^5}\,;$$

etc. annehmen, was genau mit dem übereinstimmt, was man aus der Formel (Ω) im ersten Capitel § 5 dieses Abschnittes erhält, wenn man darin $a_k = -\alpha_{0,k}$, $n = 2$, $i = 2$ und $m = \frac{1}{2}$ setzt, und unser $f(x)$ verwandelt sich in $\varphi_0(x)^{\frac{1}{2}}$, welches als erste Partialfunction zweiter Classe für $(+x)$ und $(-x)$ immer *gleiche* und *entgegengesetzte* Werthe annimmt, wie aus (Ω) für diesen Fall zu ersehen ist. Unsere Hauptfunction (welche für diesen Fall lediglich aus der ersten Partialfunction besteht) hat also die Eigenschaft, dass ihre beiden circumplexen Functionen zweiter Classe für keinen Werth von x, welcher grösser als Null ist, gleiche Werthe haben, so dass diese Darstellung diesmal für die ganze Ebene gilt.

Hat man also eine Gleichung zweiten Grades, in welcher nach Reduction auf die Form

$$\xi^2 + \psi(\xi) = 0$$

$\psi(\xi)$ so beschaffen ist, dass es möglich wird die unendlich vielen Constanten α derart einzurichten, dass für gewisse Werthe von x innerhalb eines Gebietes $\varphi(x) = \psi(\xi)$ wird, so braucht man nur jene Werthe von α in $f(x)$ einzusetzen und $f(x)$ und $f(-x)$ liefern dann die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Hat man z. B. eine Gleichung zweiten Grades mit constanten Coefficienten, welche nach Reduction die Form $y^2 + A_0 = 0$ hat und will man bewirken, dass unsere $f(x)$ und $f(-x)$ beide Wurzeln dieser Gleichung liefern sollen, so ist es genug in $\varphi(x)$ sämmtliche α mit Ausnahme von $\alpha_{0,2}$ identisch Null zu setzen, und dann wird man nur noch dafür zu sorgen haben, dass $\alpha_{0,2}\, x_1{}^2 = A_0$ werde, wobei x_1 nur innerhalb des Gebietes zu liegen braucht, in welchem ausser dem Nullpuncte keine gleichen Wurzeln von $z^2 + \varphi_0(x) = 0$ liegen, also in unserm Falle vollkommen willkürlich ist. In $f(x) = a_1 x = (-\alpha_{0,2})^{\frac{1}{2}} x$ erhält man in der That

$$f(x) = \left(-\frac{A_0}{x_1{}^2}\right)^{\frac{1}{2}} x,$$

und

$$f(x_1) \quad \text{und} \quad f(-x_1)$$

liefern wirklich beide Wurzeln.

d) Eine andere Specialisirung der Hauptlösung von

$$z^2 + \varphi_1(x)\, z + \varphi_0(x) = 0$$

wird folgende sein. Man treffe nämlich die Bestimmung, dass $\varphi_1(x)$ und $\varphi_0(x)$ ganze rationale Functionen werden, d. h. dass alle α, deren Indices eine gewisse Zahl überschreiten, identisch Null seien; nehmen wir der Einfachheit wegen an, es seien schon alle Coefficienten von x^{2q} Null für $q > 1$; d. h. $\varphi_1(x)$ und $\varphi_0(x)$ seien ganze Functionen zweiten Grades. Man wird dann die einfacheren Werthe

$$a_0 = -\alpha_{1,0}; \quad a_2 = -\alpha_{1,2}; \quad a_4 = a_6 = \cdots = 0$$

und

$$a_1^2 = 2\alpha_{1,0}\,\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2}; \quad a_3 = \frac{\alpha_{1,2}^2}{2a_1}; \quad a_5 = -\frac{\alpha_{1,2}^4}{2^3 a_1^3};$$

$$a_7 = \frac{\alpha_{1,2}^6}{2^4 a_1^5}; \quad a_9 = -\frac{5}{2^7}\frac{\alpha_{1,2}^8}{a_1^7}; \quad a_{11} = \frac{7}{2^8}\frac{\alpha_{1,2}^{10}}{a_1^9};$$

$$a_{13} = -\frac{3.7}{2^{10}}\frac{\alpha_{1,2}^{12}}{a_1^{11}}; \quad a_{15} = \frac{3.11}{2^{11}}\frac{\alpha_{1,2}^{14}}{a_1^{13}}; \ldots; \quad a_p = N_p\frac{\alpha_{1,2}^{p-1}}{a_1^{p-2}}.$$

Was den von α unabhängigen Zahlencoefficienten N_p betrifft, so lässt sich derselbe leicht bestimmen, indem man $\alpha_{0,2} = -1$; $\alpha_{1,0} = 0$; $\alpha_{1,2} = -1$ setzt, so dass einfach $a_p = N_p$ wird, während die gegebene Gleichung die Form $z^2 - 2x^2 z - x^2 = 0$ annimmt. Dieses ist aber ein specieller Fall von dem Beispiele der inversen Functionen im zweiten Capitel dieses Abschnittes, wo wir für

$$y^m - mx^m y - x^m = 0$$

die Reihe $y = \sum_0^\infty {}^p\, a_p x^p$; $a_p = \dfrac{\prod_0^{p-2}{}^\lambda (p - \lambda m)}{p!}$; $p > 2$ und $a_1 = a_2 = 1$ gehabt haben, und somit ist in unserm Falle für $m = 2$

$$N_p = \frac{\prod_0^{p-2}{}^\lambda (p - 2\lambda)}{p!},$$

welcher folgende Eigenschaften besitzt.

1) Für gerade $p = 2q$ ist $N_{2q} = 0$ (im allgemeinen Fall für $p \equiv 0 \pmod{m}$).

2) Für $p = 2q + 1$ (im allgemeinen Fall für $p \equiv i \pmod{m}$) hat N_p einen von Null verschiedenen reellen und rationalen Werth; in unserm Falle $m = 2$, kommt N_{2q+1} mit immer abwechselnden Vorzeichen vor, und zwar ist das Vorzeichen positiv, wenn q ungerade, und negativ, wenn q gerade ist, wie aus der Bildungsweise des Products $\prod_0^{2q-1}{}^\lambda (2(q - \lambda) + 1)$ ersichtlich ist, in welchem der erste negative Factor für

$\lambda = q + 1$ auftritt, von wo ab alle weiteren Factoren für $\lambda = q + 2$; $\lambda = q + 3, \cdots$, bis $\lambda = 2q - 1$ negativ bleiben; so dass im Ganzen immer $2q - 1 - q = q - 1$ negative Factoren vorhanden sind.

3) Im absoluten Betrage ist N_{2q+1} ein echter Bruch, welcher zwar mit wachsendem q abnimmt, jedoch nimmt derselbe immer langsamer und langsamer ab.

4) Der Quotient zweier aufeinander folgender Zahlencoefficienten ist immer negativ.

$$\frac{N_p}{N_{p-2}} = -\frac{p-4}{p-1}$$

wird für $p > 1$ ein echter Bruch, welcher mit wachsendem p allerdings immer wächst; indess aber für

$$p = \infty$$

die Grenze Eins im absoluten Betrag nicht überschreitet, also

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{N_p}{N_{p-2}}\right) = -1.$$

Für unsere Reihe $f(x)$ ist also

$$\frac{a_p\, x^p}{a_{p-2}\, x^{p-2}} = \frac{N_p}{N_{p-2}} \frac{\alpha_{1,2}^2}{a_1^2} x^2 = \frac{N_p}{N_{p-2}} \frac{\alpha_{1,2}^2}{2\alpha_{1,0}\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2}} x^2,$$

so dass sie convergirt für $\text{Mod. } x^2 < \frac{\text{Mod. } a_1^2}{\alpha_{1,2}^2}$,

und divergirt für $\qquad \text{Mod. } x^2 > \frac{\text{Mod. } a_1^2}{\alpha_{1,2}^2}$.

Für $x^2 = \pm \frac{a_1^2}{\alpha_{1,2}^2}$ nimmt die Reihe die Form an

$$f(x) = -\alpha_{1,0} \pm \frac{a_1^3}{\alpha_{1,2}^2} - a_1 x \left[1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \mp \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^7} \mp \cdots\right]$$

so dass die Reihe für $x^2 = + \frac{a_1^2}{\alpha_{1,2}^2}$ convergirt, dagegen divergirt dieselbe für $x^2 = -\frac{a_1^2}{\alpha_{1,2}^2}$, weil der aus reellen Grössen bestehende Klammerinhalt bei abwechselndem Vorzeichen der

Glieder convergirt und bei gleichem Vorzeichen divergirt. Wir wollen das Resultat auf gewöhnlichem Wege verificiren.

e) Für unsern speciellen Fall konnte man die ursprüngliche Gleichung in der Form

$$(z + \alpha_{1,0})^2 + 2\alpha_{1,2}x^2 z + \alpha_{0,2}x^2 = 0$$

oder auch

$$(z + \alpha_{1,0})^2 + 2\alpha_{1,2}x^2(z + \alpha_{1,0}) - a_1{}^2 x^2 = 0$$

schreiben. Bildet man die partielle Ableitung nach z (oder nach $z + \alpha_{1,0}$), so erhält man, wenn man dieselbe gleich Null setzt:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2[(z + \alpha_{1,0}) + \alpha_{1,2}x^2] = 0.$$

Die letzten beiden Gleichungen werden zugleich befriedigt entweder für das Werthsystem $x^2 = 0$; $(z + \alpha_{1,0})^2 = 0$, oder für das Werthsystem

$$x^2 = -\frac{a_1{}^2}{\alpha_{1,2}^2}; \; z + \alpha_{1,0} = -\alpha_{1,2}x^2 = \frac{a_1{}^2}{\alpha_{1,2}}.$$

Der Punct $x = 0$ hindert nicht, weil für ihn, in Verbindung mit $z + \alpha_{0,1} = 0$, auch $\frac{\partial F}{\partial x}$ verschwindet; dagegen verschwindet für diese Werthe weder $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ noch $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Die Puncte $x^2 = -\frac{a_1{}^2}{\alpha_{1,2}^2}$, oder $x = \pm\frac{a_1}{\alpha_{1,2}}\sqrt{-1}$, für welche die Reihe, wie wir oben gesehen haben, divergirt, ist also ein Verzweigungspunct, für welchen die Reihe (nach ganzen Potenzen fortschreitend) in der That die Wurzel nicht repräsentiren kann.

f) *Anwendung der zweiten Methode.* Hat man nun eine Gleichung zweiten Grades mit constanten Coefficienten

$$z^2 + A_1 z + A_0 = 0,$$

und will man die Wurzeln derselben durch unsere Reihe darstellen, so ist es nothwendig, aber auch hinreichend, die Grössen $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{0,2}$ so zu bestimmen, dass für einen Werth von $x = x_1$, der nur so gewählt ist, dass sein Modul kleiner ist, als der von $\frac{a_1}{\alpha_{1,2}}$, sonst aber ganz beliebig sein

kann, die linearen Bedingungsgleichungen in Bezug auf die α (mit Ausnahme von $\alpha_{1,0}$, welche auch im Quadrate vorkommt), nämlich

$$\varphi_1(x_1) = A_1,$$
$$\varphi_0(x_1) = A_0,$$

also

$$2\alpha_{1,0} + 2x_1^2 \cdot \alpha_{1,2} = A_1,$$
$$\alpha_{1,0}^2 + x_1^2 \cdot \alpha_{0,2} = A_0,$$

befriedigt werden; und es sind noch immerhin zwei Gleichungen für drei Grössen, so dass man noch speciell $\alpha_{1,0} = 0$ (diese Wahl entspricht der Verlegung des Anfangspunctes der z-Ebene nach dem Nullpuncte) annehmen kann und bekommt so

$$\alpha_{1,2} = \frac{A_1}{2x_1^2} \text{ und } \alpha_{0,2} = \frac{A_0}{x_1^2}; \quad a_1^2 = -\alpha_{0,2} = -\frac{A_0}{x_1^2}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \pm \frac{\sqrt{-A_0}}{x_1}; \quad a_2 = -\frac{A_1}{2x_1^2}$$

und

$$a_{2q+1} = \pm N_{2q+1} \frac{(\frac{1}{2}A_1)^{2q}}{(-A_0)^{\frac{2q-1}{2}} x_1^{2q+1}}.$$

Wir bemerken dabei zunächst, dass x_1 hier im Nenner von a_p zur p^{ten} Potenz vorkommt, so dass, wenn man in der Reihe für x den Werth x_1 einsetzt, sich dieser willkürlich gewählte Werth x_1 weghebt, und die Reihe lautet dann

$$f_1(x_1) = \pm \left\{ \sqrt{-A_0} \mp \tfrac{1}{2}A_1 + \sum_1^{\infty} {}_q\, N_{2q+1} \frac{\left(\frac{A_1}{2}\right)^{2q}}{(-A_0)^{\frac{2q-1}{2}}} \right\}.$$

Der Quotient zweier auf einander folgender Glieder dieser Reihe ist

$$-\frac{2q-3}{2q} \cdot \frac{A_1^2}{-4A_0},$$

so dass die Reihe (nach dem Obigen) convergirt für

$$\text{Mod. } A_1^2 < \text{Mod. } (-4A_0),$$

wie es auch kommen musste.

(Die Reihe selbst ist übrigens convergent für

$$\text{Mod. } A_1^2 x^2 < \text{Mod. } (-4 A_0 x_1^2),$$

die gegebene Gleichung wird aber nur für $x = x_1$ befriedigt, weil wir die Coefficienten so gewählt haben.)

Es scheint hier eine Beschränkung unserer Lösung vorzuliegen, wonach sie nur für den Fall, wenn die Discriminante der gegebenen Gleichung negativ ist, Gültigkeit hat; indess liegt dieses nur daran, dass wir eine der willkürlichen Constanten zu viel vernachlässigt haben, indem wir $\alpha_{1,0} = 0$ gesetzt haben. Lässt man $\alpha_{1,0}$ vorläufig noch unbestimmt, so wird $\alpha_{1,2} = \frac{A_1 - 2\alpha_{1,0}}{2x_1^2}$; $\alpha_{0,2} = \frac{(A_0 - \alpha_{1,0}^2)}{x_1^2}$, also

$$a_1^2 = 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2} = -\frac{\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0} A_1 + A_0}{x_1^2}.$$

Das allgemeine Glied der Reihe hat die Form

$$a_{2q+1} x^{2q+1} = N_{2q+1} \frac{(A_1 - 2\alpha_{1,0})^{2q} x^{2q+1}}{2^{2q}\left[-(\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,0} A_1 + A_0)\right]^{\frac{2qn-1}{2}} x_1^{2q+1}},$$

und ihre Convergenzbedingung für $x = x_1$ wird dann

$$\text{Mod. } (A_1 - 2\alpha_{1,0})^2 < \text{Mod. } \left[-4(\alpha_{1,0}(\alpha_{1,0} - A_1)) - 4A_0\right],$$

und weil $\alpha_{1,0}$ eine willkürliche Grösse ist, so kann man über dieselbe so verfügen, dass die letzte Bedingungsgleichung auch dann befriedigt wird, wenn Mod. $(A_1^2) >$ Mod. $(-4A_0)$. Wir werden die dazu nöthige Rechnung bei der Anwendung der dritten Methode, wo sie leichter wird, wirklich durchführen.

g) Anwendung der dritten Methode. Es sei eine zweite Gleichung gegeben

$$F_1(z, x) = z^2 + \varphi_{1,1}(x) z + \varphi_{0,1}(x) = 0$$

und es werde diesmal verlangt eine Potenzreihe, welche in dem gemeinschaftlichen Convergenzgebiete von $\varphi_{1,1}(x)$ und $\varphi_{0,1}(x)$ giltig ist, nämlich

$$f_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

so zu bestimmen, dass für jeden in einem gewissen Gebiete

liegenden Werth x die mit $(+1)$ resp. (-1) multiplicirten circumplexen Functionen, nämlich:

$$f_1(x) \quad \text{und} \quad -f_1(-x)$$

beide Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen sollen.

Man sieht leicht, dass hier das absolute Glied, übereinstimmend mit unserer Theorie, lauten würde:

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(x) = \begin{vmatrix} p_1 p_0 \\ p_0 p_1 \end{vmatrix} = & - b_0^2 - (2b_0b_2 - b_1^2)x^2 \\ & - (2b_0b_4 - 2b_1b_3 + b_2^2)x^4 \\ & - (2b_0b_6 - 2b_6b_5 + 2b_2b_4 - b_3^2)x^6 \\ & - (2b_0b_8 - 2b_1b_7 + 2b_2b_6 - 2b_3b_5 + b_4^2)x^8 \cdots,\end{aligned}$$

also, wie oben, eine *nullte* Partialfunction *zweiter* Classe, während dagegen der Coefficient von z

$$\varphi_{1,1}(x) = -2[b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + \cdots],$$

also eine *erste* Partialfunction (nicht etwa eine *nullte* wie oben) *zweiter* Classe sein muss, wobei, wie in unserer allgemeinen Theorie behauptet wurde, die Coefficienten von x^ϱ in $\varphi_{1,1}(x)$ die mit (-1) multiplicirten ersten Ableitungen nach b_1 von den Coefficienten von $x_{\varrho+1}$ in $\varphi_{0,1}(x)$ sind.

Denkt man sich nun die Functionen $\varphi_{0,1}(x)$, $\varphi_{1,1}(x)$ in der Form

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(x) &= -\ [\beta_{0,0} + \beta_{0,2}x^2 + \beta_{0,4}x^4 + \cdots], \\ \varphi_{1,1}(x) &= -2[\beta_{1,1}x + \beta_{1,3}x^3 + \beta_{1,5}x^5 + \cdots]\end{aligned}$$

gegeben, so sind die b mit ungeraden Indices [$\equiv 1 \pmod 2$; entsprechend im allgemeinen Falle $\equiv 1 \pmod n$] sofort aus der identischen Gleichung

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_{1,1}(x) + 2\underset{2,1}{f_1}(x) \\ &= 2[(\beta_{1,1} - b_1)x + (\beta_{1,3} - b_3)x^3 + (\beta_{1,5} - b_5)x^5 + \cdots],\end{aligned}$$

in welcher die einzelnen Coefficienten verschwinden sollen, alle eindeutig bestimmt. Für die b mit geraden Indices besteht aber die ebenfalls identische Gleichung

$$\begin{aligned}0 = \varphi_{0,1}(x) + \underset{2,0}{f_1}(x)^2 - \underset{2,1}{f_1}(x)^2 = & (b_0^2 - \beta_{0,0}) + (2b_0b_2 - b_1^2 - \beta_{0,2})x^2 \\ & + (2b_0b_4 - 2b_1b_3 + b_2^2 - \beta_{0,4})x^4 \\ & + (2b_0b_6 - 2b_1b_5 + 2b_2b_4 - b_3^2 - \beta_{0,6})x^6 + \cdots,\end{aligned}$$

woraus sich ergiebt:

$$b_0^2 = \beta_{0,0}; \quad b_2 = \frac{\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2}}{2 b_0};$$

$$b_4 = \frac{4\beta_{0,0}(2\beta_{1,1}\beta_{1,3} + \beta_{0,4}) - (\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2})^2}{2^3 b_0^3};$$

$$b_6 = \frac{\beta_{0,6} + 2\beta_{1,1}\beta_{1,5} + \beta_{1,3}^2 - 2b_2 b_4}{2b_0};$$

$$b_8 = \frac{2\beta_{1,1}\beta_{1,7} + 2\beta_{1,3}\beta_{1,5} - 2b_2 b_6 - b_4^2}{2b_0}; \ldots$$

Betrachten wir nun den speciellen Fall, wo die Coefficienten $\varphi_{0,1}(x)$ und $\varphi_{1,1}(x)$ den zweiten Grad nicht überschreiten, nämlich:

$\varphi_{0,1}(x) = -\beta_{0,0} - \beta_{0,2}x^2$, während für $q > 1$; $\beta_{0,2q} = 0$,
$\varphi_{1,1}(x) = -2\beta_{1,1}x$, „ „ $q \geqq 1$; $b_{1,2q+1} = 0$,

dann sind alle b mit ungeraden Indices mit Ausnahme von $b_1 = \beta_{1,1}$ identisch Null, während für die b mit geraden Indices das Gesetz besteht:

$$b_0^2 = \beta_{0,0}; \quad b_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2}}{b_0}; \quad b_4 = -\frac{1}{2^3}\,\frac{(\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2})^2}{b_0^3};$$

$$b_6 = \frac{1}{2^4}\,\frac{(\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2})^3}{b_0^5}; \quad b_8 = -\frac{5}{2^7}\,\frac{(\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2})^4}{b_0^7}; \ldots$$

und allgemein

$$b_{2q} = \frac{\prod\limits_{0}^{2q-1}{}^{\lambda}\,(2(q-\lambda)+1)}{(2q+1)!}\;\frac{(\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2})^q}{b_0^{2q-1}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2}} = \beta'$, so kann man die gesuchte Potenzreihe für unseren speciellen Fall auch so schreiben:

$$f_1(x) = \beta_{0,0}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{\beta'}{b_0}\,x^2 - \frac{1\cdot\beta'^4}{2\cdot b_0^3}\,\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\beta'^6}{b_0^5}\,\frac{x^6}{6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{\beta'^8}{b_0^7}\,\frac{x^8}{8} + - \cdots;$$

und sie ist für Mod. $x^2 <$ Mod. $\frac{b_0^2}{\beta'^2}$ convergent.

Ist nun eine Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^2 + B_1 z + B_0 = 0$$

gegeben und verlangt man, dass die obige Reihe durch $f_1(x)$ und $-f_1(-x)$ die Wurzeln repräsentire, so braucht man nur für einen beliebigen Werth $x = x_1$ die Erfüllung von

$$\varphi_{0,1}(x_1) = -\beta_{0,0} - \beta_{0,2} x_1^2 = B_0,$$
$$\varphi_{1,1}(x_1) = - \quad 2\beta_{1,1} x_1 \quad = B_1$$

auf irgend eine Weise zu bewirken. Setzt man z. B.

$$\beta_{0,0} = -B_0; \quad \beta_{0,2} = 0 \quad \text{und} \quad \beta_{1,1} = -\frac{B_1}{2x_1},$$

so wird

$$b_{2q} x^{2q} = N'_{2q} \frac{(-B_1)^{2q} x^{2q}}{(-B_0)^{\frac{2q-1}{2}} (2x_1)^{2q}},$$

und die Convergenzbedingung für $x = x_1$ ist dann

$$\text{Mod. } B_1^2 < \text{Mod. } (-4B_0),$$

also wiederum das Kriterium der Discriminante der gegebenen Gleichung. Um diese Bedingung zu beseitigen, d. h. um die Lösung für Mod. $B_1 >$ Mod. $(-4B_0)$ giltig zu machen, lasse man vorläufig $\beta_{0,2}$ (welches wir vorhin Null sein liessen) noch unbestimmt, so dass

$$\beta_{0,0} = -(B_0 + \beta_{0,2} x_1^2);$$

das allgemeine Glied der Reihe wird dann

$$b_{2q} x^{2q} = N'_{2q} \frac{(B_1^2 + 4\beta_{0,2} x_1^2)^q x^{2q}}{2^{2q}(-B_0 - \beta_{0,2} x_1^2)^{\frac{2q-1}{2}} x_1^{2q}}.$$

Das Kriterium der Gültigkeit wird

$$\text{Mod. } (B_1^2 + 4\beta_{0,2} x_1^2) x^2 < \text{Mod. } (-4B_0 - 4\beta_{0,2} x_1^2) x_1^2,$$

und für $x = x_1$

$$(w) \quad \text{Mod. } (B_1^2 + 4\beta_{0,2} x_1^2) < \text{Mod. } (-4B_0 - 4\beta_{0,2} x_1^2).$$

Sei nun $B_1^2 = \lambda_1 + \mu_1 \sqrt{-1}$; $-4B_0 = \lambda_0 + \mu_0 \sqrt{-1}$ und $-\beta_{0,2} x_1^2 = \xi + \eta\sqrt{-1}$ und zugleich Mod. $B_1^2 >$ Mod. $(-4B_0)$ d. h. $\lambda_1^2 + \mu_1^2 = \lambda_0^2 + \mu_0^2 + M^2$ und wir wollen zeigen, dass auch für diesen Fall die Ungleichung (w) durch zweck-

mässige Wahl von $\beta_{0,2}$, d. h. von ξ und η bewirkt werden kann. In der That verlangt die Ungleichung (w), dass

$$(\lambda_1 - \xi)^2 + (\mu_1 - \eta)^2 < (\lambda_0 + \xi)^2 + (\mu_0 + \eta)^2,$$

oder

$$\lambda_1{}^2 + \mu_1{}^2 - 2\lambda_1\xi - 2\mu_1\eta < \lambda_0{}^2 + \mu_0{}^2 + 2\lambda_0\xi + 2\mu_0\eta$$

d. h. mit Berücksichtigung von $\lambda_1{}^2 + \mu_1{}^2 = \lambda_0{}^2 + \mu_0{}^2 + M^2$

$$M^2 < 2(\lambda_0 + \lambda_1)\xi + 2(\mu_0 + \mu_1)\eta,$$

und es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese Bedingung in der willkürlichsten Weise befriedigt werden kann.

h) Um noch die Uebereinstimmung dieser Lösung mit der gewöhnlichen, mit Hilfe von Radicalen, welche bei den ersten vier Graden noch möglich ist, einzusehen, dividire man die obige Reihe durch b_0 und schreibe dieselbe in der Form

$$\frac{f_1(x)}{b_0} = \frac{\beta_{1,1}}{b_0}x + 1 + \frac{\left(\frac{\beta' x}{b_0}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\beta' x}{b_0}\right)^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\left(\frac{\beta' x}{b_0}\right)^6}{6} - + \cdots,$$

dann ersieht man sofort, dass man auf Grund des bekannten Satzes, dass, so lange Mod. $\xi \overline{\gtrless} 1$ ist, die Formel

$$\sqrt{1+\xi^2} = 1 + \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\xi^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\xi^6}{6} - \cdots$$

gilt, für die obige Reihe auch setzen kann:

$$f_1\left(\frac{b_0}{\beta'}\xi\right) = \left(\frac{\beta_{1,1}}{\beta'}\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right)b_0,$$

oder auch

$$f_1(x) = \beta_{1,1}x \pm \sqrt{\beta_{0,0} + (\beta_{1,1}^2 + \beta_{0,2})x^2}.$$

Was man bei der Lösung durch Radicale (wo sie möglich ist) dadurch erreicht, dass man den Radicalgrössen die Vorzeichen + und — ertheilt, erreicht man nach der obigen Anschauung dadurch, dass man für das Wurzelzeichen den absoluten Betrag setzt, dagegen für die eine Wurzel $f_1(x)$ und für die zweite $-f(-x)$ nimmt.

Fasst man das oben Durchgeführte zusammen, so findet man folgenden Satz bestätigt:

Sollen die circumplexen Functionen von $f(x)$ die Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades für ein gewisses Gebiet

der x-Ebene darstellen, so muss das von z unabhängige Glied der gegebenen Gleichung *jedenfalls* eine *gerade* Function von x sein, wenn $f(x)$ nur ganzzahlige Exponenten besitzt.

Ist dann der Coefficient von z ebenfalls eine *gerade* Function von x, so stellen $f(x)$; $f(-x)$ die beiden Wurzeln dar, wenn noch die Bedingung erfüllt ist, dass das von x unabhängige Glied in dem Coefficienten von z die Ableitung von dem absoluten Gliede des Coefficienten von z^0.

Ist dagegen der Coefficient von z eine ungerade Function von x, so stellen $f(x)$; $-f(-x)$ die Wurzeln dar; wobei das absolute Glied in dem Coefficienten von z^0 beliebig sein kann.

§ 13.

Drei Lösungen der Gleichung dritten Grades.

A. *Die nullte cyklische Gleichung.*

a) Es sei die Gleichung 3ten Grades

$$z^3 + \varphi_{2,0}(x-g_0)z^2 + \varphi_{1,0}(x-g_0)z + \varphi_{0,0}(x-g_0) = 0$$

gegeben, deren Coefficienten, der Einfachheit wegen, ganze rationale Functionen von x, deren Grad die Zahl 3 nicht überschreitet*), sein mögen, nämlich:

---

*) Im allgemeinen Falle, wo noch die φ Potenzreihen sind, hat man

$$\text{aus (0)}\ 0 = \left(a_0^3 + \alpha_{0,0}^3\right) + (3a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + a_1^3 + \alpha_{0,3})(x-g_0)^3 +$$
$$+\Big[3\Big(a_0^2a_6 - a_0a_1a_5 + (a_1^2 - a_0a_2)a_4 +$$
$$+ a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 + \frac{a_2^3}{3}\Big) + \alpha_{0,6}\Big](x-g_0)^6 +$$
$$+\Big[3\Big(a_0^2a_9 - a_0a_1a_8 + (a_1^2 - a_0a_2)a_7 +$$
$$+ (2a_0a_3 - a_1a_2)a_6 + (a_2^2 - a_1a_3 - a_0a_4)a_5 +$$
$$+ a_1a_4^2 - a_2a_3a_4 + \frac{a_3^3}{3}\Big) + \alpha_{0,9}\Big](x-g_0)^9 + \cdots$$

$$\text{aus (1)}\ 0 = 3\left(a_0^2 - \alpha_{0,0}^2\right) + 3[2a_0a_3 - a_1a_2 - \alpha_{1,3}](x-g_0)^3 +$$
$$+ 3[2a_0a_6 - a_1a_5 - a_2a_4 + a_3^2 - \alpha_{1,6}](x-g_0)^6 +$$
$$+ 3[2a_0a_9 - a_1a_8 - a_2a_7 + 2a_3a_6 - a_4a_5 - \alpha_{1,9}](x-g_0)^9 + \cdots$$

$$\text{aus (2)}\ 0 = 3(a_0 + \alpha_{0,0}) + 3(a_3 + \alpha_{2,3})(x-g_0)^3 +$$
$$+ 3(a_6 + \alpha_{2,6})(x-g_0)^6 + 3(a_9 + \alpha_{2,9})(x-g_0)^9 + \cdots$$

Alle Hauptschlüsse bestehen auch in diesem allgemeinen Falle;

$$\varphi_{0,0}(x-g_0) = \alpha_{0,0}^3 + \alpha_{0,3}(x-g_0)^3,$$

$$\varphi_{1,0}(x-g_0) = 3\alpha_{0,0}^2 + 3\alpha_{1,3}(x-g_0)^3,$$

$$\varphi_{2,0}(x-g_0) = 3\alpha_{0,0} + 3\alpha_{2,3}(x-g_0)^3;$$

so dass wir nach der obigen Theorie berechtigt sind, eine Potenzreihe $f(x-g_0)$ von der Beschaffenheit zu suchen, dass ihre drei circumplexen Functionen dritter Classe in der Umgebung von $x=g_0$ für jeden Werth von x die drei Wurzeln der Gleichung repräsentiren. Zur Bestimmung der Coefficienten a von $f(x-g_0)$ haben wir dann die drei identischen Gleichungen:

$$(0)\qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + \varphi_{0,0}(x-g_0) = 0,$$

$$(1)\qquad 3\begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} - \varphi_{1,0}(x-g_0) = 0,$$

$$(2)\qquad 3p_0 + \varphi_{2,0}(x-g_0) = 0.$$

Aus (2) ergeben sich sofort alle a, deren Indices durch 3 theilbar sind, nämlich $a_{3p} = -\alpha_{2,3p}$; und somit existiren in unserem Falle, wo alle $\alpha_{2,3p} = 0$ für $p > 1$, in der gesuchten Function $f(x-g_0)$ überhaupt nur zwei Glieder, deren Exponenten $\equiv 0$ (mod. 3), nämlich $a_0 + a_3(x-g_0)^3$ und zwar sind ihre Coefficienten

$$a_0 = -\alpha_{0,0}; \quad a_3 = -\alpha_{2,3}.$$

Ferner hat man aus den Coefficienten von $(x-g_0)^3$, welche für sich verschwinden müssen,

---

nur sind die Ausdrücke für die berechneten Coefficienten complicirter; und unser specieller Fall ist aus dem allgemeinen direct dadurch zu erhalten, dass man die α mit höheren Indices gleich Null setzt. Es sind natürlich auch andere Specialisirungen möglich und wir wollen in der That an anderer Stelle andere Voraussetzungen über diese Potenzreihen φ machen, um dadurch in ganz analoger Weise die Lösung allgemeiner algebraischer Functionen zu erwirken.

respective (1) $3a_1a_2 = 6a_0a_3 - 3\alpha_{1,3}$

und in (0) $a_1^3 - 3a_0a_1a_2 = -3a_0^2a_3 - \alpha_{0,3}$,

woraus sich sofort, übereinstimmend mit der obigen Theorie, ergiebt: für a_1 die binomische Gleichung 3ten Grades

$$a_1^3 = -3\alpha_{0,0}^2\alpha_{2,3} + 3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3} - \alpha_{0,3}$$

und dann für a_2 die lineare Gleichung

$$a_2 = \frac{2\alpha_{0,0}\alpha_{2,3} - \alpha_{1,3}}{a_1}.$$

Ebenso liefern die Coefficienten von $(x - g_0)^6$ in (1) und (0) zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von a_4 und a_5, woraus man erhält:

$$a_4 = a_3\frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{3}\frac{a_2^3}{a_1^2}; \qquad a_5 = \frac{a_3^2}{a_1} - a_3\frac{a_2^2}{a_1^2} + \frac{1}{3}\frac{a_2^4}{a_1^3}.$$

Ferner erhält man aus den Coefficienten von $(x - g_0)^9$ eine lineare Bestimmung von a_7 und a_8, nämlich:

$$a_7 = \frac{2}{3}\frac{a_3^3}{a_1^2} - \frac{6}{3}a_3^2\frac{a_2^2}{a_1^3} + \frac{5}{3}a_3\frac{a_2^4}{a_1^4} - \frac{4}{9}\frac{a_2^6}{a_1^5},$$

$$a_8 = -\frac{5}{3}a_3^3\frac{a_2}{a_1^3} + \frac{10}{3}a_3^2\frac{a_2^3}{a_1^4} - \frac{7}{3}a_3\frac{a_2^5}{a_1^5} + \frac{5}{9}\frac{a_2^7}{a_1^6},$$

etc. Wir gehen hier auf die nähere Erörterung des Gesetzes, nach welchem die Glieder sich hier entwickeln, nicht ein, da man, wie wir bald sehen werden, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, einen speciellern Fall annehmen kann, für welchen diese Formel bedeutend einfacher wird. Man bemerkt zunächst, dass in jedem der Coefficienten alle Summanden bis auf den *einen* letzten mit dem Factor a_3 behaftet sind, während der letzte Summand, welcher für a_p, bis auf den Zahlencoefficienten N_p, die Form $\frac{a_2^{p-1}}{a_1^{p-2}}$ hat und somit nach der obigen Theorie den Factor a_3 auch niemals haben kann, (wenn das Gewicht des Gliedes p sein soll), wofern p durch 3 nicht theilbar ist.

b) Setzen wir nun $\alpha_{2,3} = 0$, so dass $f_{3,0}(x - g_0)$ constant:

$$p_0 = -\frac{1}{3}\varphi_{2,0}(x - g_0) = -\alpha_{0,0}$$

wird, so leidet die Allgemeinheit dabei deshalb nicht, da jede gegebene Gleichung durch eine lineare Substitution $(z + \zeta)$ anstatt z bekanntlich auf eine Form gebracht werden kann, in welcher der Coefficient von z^{n-1} einen gegebenen Werth annimmt. Bei dieser Annahme

$$a_3 = 0$$

vereinfacht sich aber unsere Function bedeutend, indem dann jeder Coefficient, dessen Index grösser als *Eins* ist, aus einem einzigen Gliede besteht. Man hat nämlich:

$$a_0 = -\alpha_{0,0}; \quad a_1^3 = 3\alpha_{0,0}\,\alpha_{1,3} - \alpha_{0,3}; \quad a_2 = -\frac{\alpha_{1,3}}{a_1};$$

$$a_4 = -\frac{1}{3}\,\frac{a_2^3}{a_1^2}; \quad a_5 = \frac{1}{3}\,\frac{a_2^4}{a_1^3}; \quad a_7 = -\frac{4}{9}\,\frac{a_2^6}{a_1^5}; \quad a_8 = \frac{5}{9}\,\frac{a_2^7}{a_1^6};$$

$$a_{10} = -\frac{77}{81}\,\frac{a_2^9}{a_1^8}; \quad a_{11} = \frac{104}{81}\,\frac{a_2^{10}}{a_1^9}, \text{ etc.}$$

An diesen Coefficienten bemerkt man sofort ein beständiges Gesetz; es ist nämlich:

$$a_p = N_p\,\frac{a_2^{p-1}}{a_1^{p-2}},$$

wobei N_p ein gewisser Zahlencoefficient ist, dessen Bildungsgesetz analog, wie bei der Gleichung zweiten Grades aus der Formel für y, welches der Gleichung $y^m - mx^m y - x^m = 0$ (im zweiten Capitel dieses Abschnittes) nämlich für $p > 3$

$$N_p = \frac{\prod\limits_{\lambda=0}^{p-2}(p - 3\lambda)}{p!}$$

leicht bestimmt werden kann, während die Nothwendigkeit der Form $\frac{a_2^{p-1}}{a_1^{p-2}}$ sich in folgender Weise direct ergiebt. Wie wir gesehen haben, lassen sich alle Coefficienten gruppen-

weise als ganze rationale Functionen von den Coefficienten mit kleinern Indices ausdrücken, so dass, wenn man sich in a_p die Werthe rückwärts eingesetzt denkt, so muss a_p als rationale Function der Grössen der ersten Gruppe a_0, a_1, a_2 erscheinen, etwa in der Form

$$a_p = \sum^{\lambda} M_\lambda a_0^{k_\lambda} a_1^{\mathfrak{l}_\lambda} a_2^{m_\lambda},$$

wobei M eine Zahl und k_λ, $\mathfrak{l}_\lambda$, m_λ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die die Bedingungen

$$k_\lambda + \mathfrak{l}_\lambda + m_\lambda = 1,$$
$$\mathfrak{l}_\lambda + 2m_\lambda = p; \quad (p = \text{einer positiven ganzen Zahl})$$

erfüllen müssen.

Dass aber a_0 in unserem Falle in den weitern Coefficienten nicht vorkommen kann, erhellt aus folgender Ueberlegung. Da jetzt $p_0 = a_0$ ist, so werden alle Coefficienten von x^q, sofern $q > 0$ ist, in der ausgerechneten Gleichung (1), wo a_0 lediglich als Summand, also nur in dem Coefficienten von x^0 vorkommt, von a_0 unabhängig sein. In der ausgerechneten Gleichung (0) kommt allerdings a_0 in allen höheren Coefficienten wohl vor; indess stammt dieses lediglich aus dem Summanden $3p_0\,p_1\,p_2$ (von den andern drei Summanden p_0^3, p_1^3, p_2^3, die überhaupt in unserer cyklosymmetrischen Determinante bekanntlich noch vorkommen können, sind die zwei letztern von a_0 unabhängig, und der erstere $p_0^3 = a_0^3$ liefert keinen Beitrag zum Bau eines Coefficienten von x^q, wenn $q > 0$ ist). Es ist aber jetzt

$$3p_0p_1p_2 = 3a_0(p_1p_2),$$

und da nach (1) jeder Coefficient von x^q, (sofern $q > 3$ ist), welcher aus $p_1\,p_2$ entspringt, identisch verschwindet, so ist in unserem Falle jeder Coefficient von x^q für $q > 3$ von a_0 nur insofern abhängig, als a_1 und a_2 es sind. Es kann aber ausser a_1 und a_2 in a_p die Grösse a_0 direct nicht vorkommen, so dass $k_\lambda = 0$ sein muss, und somit lauten unsere Bedingungsgleichungen

$$\mathfrak{l}_\lambda + m_\lambda = 1,$$
$$\mathfrak{l}_\lambda + 2m_\lambda = p,$$

woraus folgt $\mathfrak{l}_\lambda = -(p-2)$ und $m_\lambda = p-1$; also haben die Grössen $\mathfrak{l}_\lambda$, m_λ für alle Glieder unter dem Summenzeichen nach λ nur je einen einzig möglichen Werth, d. h. es ist

$$a_p = N_p \frac{a_2^{p-1}}{a_1^{p-2}},$$

wie behauptet wurde.

Das allgemeine Glied lautet also für $p > 3$:

$$a_p (x-g_0)^p = \frac{\prod_{\lambda=0}^{p-2}(p-\lambda\cdot 3)}{p!} \cdot \frac{(-\alpha_{1,3})^{p-1}(x-g_0)^p}{(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^{\frac{2p-3}{3}}},$$

und weil nach (f) in § 6 der Quotient zweier Zahlencoefficienten, deren Indices sich um drei Einheiten unterscheiden, für wachsende p gegen den Grenzwerth $(1-3)^{3-1} = 4$ convergirt, so ist die Convergenzbedingung für unsere Reihe:

$$\text{Mod.}\ \frac{4(-\alpha_{1,3})^3(x-g_0)^3}{(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^2} < 1,$$

oder

$$\text{Mod.}\ (x-g_0) < \frac{(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^{\frac{2}{3}}}{-4\alpha_{1,3}}.$$

c) Es ist leicht nach der gewöhnlichen Methode zu verificiren, dass $x - g_0 = \frac{(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^{\frac{2}{3}}}{-4\alpha_{1,3}}$ wirklich ein Verzweigungspunkt ist. Schreibt man nämlich unsere Gleichung in der Form

$$F(z,x) = (z+\alpha_{0,0})^3 + 3\alpha_{1,3}(x-g_0)^3 z + \alpha_{0,3}(x-g_0)^3 = 0,$$

bildet

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3[(z+\alpha_{0,0})^2 + \alpha_{1,3}(x-g_0)^3] = 0,$$

und setzt

$$z + \alpha_{0,0} = (-\alpha_{1,3})^{\frac{1}{2}}(x-g_0)^{\frac{3}{2}}$$

aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so erhält man:

$$(x-g_0)^3\,[4(-\alpha_{1,3})^{\frac{3}{2}}(x-g_0)^{\frac{3}{2}}-(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})]=0,$$

woraus durch Vergleichung mit den ursprünglichen Gleichungen ausser dem Werthsysteme $(x-g_0)=0$; $(z+\alpha_{0,0})=0$ noch der Punkt

$$x-g_0=\frac{(3\alpha_{0,0}\,\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^{\frac{2}{3}}}{-4\alpha_{1,3}}$$

als Verzweigungspunkt sich ergiebt.

Innerhalb des Kreises mit dem obigen Werthe als Radius um den Punkt $x=g_0$ liefert also die Potenzreihe

$$\begin{aligned}
f(x) = & -\alpha_{0,0}+(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^{\frac{1}{3}}(x-g_0) \\
& -\frac{\alpha_{1,3}}{(3\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}-\alpha_{0,3})^{\frac{1}{3}}}(x-g_0)^2 \\
& +\sum_{3}^{\infty}{}_{p}\,\frac{\prod\limits_{0}^{p-2}{}_{\lambda}\,(p-3\lambda)}{p!}\cdot\frac{(-\alpha_{1,3})^{p-1}(x-g_0)^p}{(3\alpha_{0,0}\,\alpha_{1,3}-\alpha_{0,1})^{\frac{2p-3}{3}}}
\end{aligned}$$

für jeden Werth von x durch ihre circumplexen Functionen 3[ter] Classe die drei Wurzeln der Gleichung

$$z^3+\varphi_{2,0}(x-g_0)\,z^2+\varphi_{1,0}(x-g_0)\,z+\varphi_{0,0}(x-g_0)=0,$$

wenn die Functionen φ die einfache Gestalt

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,0}(x-g_0) &= \overset{3}{\alpha}_{0,0}+\alpha_{0,3}(x-g_0)^3, \\
\varphi_{1,0}(x-g_0) &= 3\overset{2}{\alpha}_{0,0}+3\alpha_{1,3}(x-g_0)^3, \\
\varphi_{2,0}(x-g_0) &= 3\alpha_{0,0}
\end{aligned}$$

haben, worin ausser der Grösse g_0 nur noch drei willkürliche Constanten $\alpha_{0,0}$, $\alpha_{0,3}$, $\alpha_{1,3}$ vorhanden sind. (Wir haben deren nur so viel gelassen, als die Lösung jeder Gleichung mit constanten Coefficienten höchstens erfordern könnte; sonst konnten wir aber so viel willkürliche α lassen, als zu irgend einem Zwecke nöthig wäre.)

d) Ist nun eine Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^3+A_2z^2+A_1z+A_0=0$$

gegeben und wünscht man, dass unsere Reihe durch ihre circumplexen Functionen die drei Wurzeln repräsentiren

sollen, so bleibt nur noch übrig, für einen beliebigen innerhalb jenes Kreises liegenden Werth x_1 von x von den zu bestimmenden Constanten die Erfüllung der drei Gleichungen

$$\alpha_{0,0} = \frac{A_2}{3}; \quad \alpha_{1,3} = \frac{3A_1 - A_2^2}{9(x_1 - g_0)^3}; \quad \alpha_{0,3} = \frac{3^3 A_0 - A_2^3}{3^3(x_1 - g_0)^3}$$

zu verlangen und diese Werthe in die Reihe einzusetzen.

Nehmen wir noch zur Vereinfachung der Rechnung an, wir hätten es mit der Reducente zu thun, so würde

$$3\alpha_{0,0} = A_2 = 0$$

zu setzen sein, und wir hätten die einfachern Werthe

$$\alpha_{1,3} = \frac{A_1}{3(x_1 - g_0)^3}; \quad \alpha_{0,3} = \frac{A_0}{(x_1 - g_0)^3};$$

das allgemeine Glied der Reihe wird dann

$$N_p \frac{(-\alpha_{1,3})^{p-1}}{(-\alpha_{0,3})^{\frac{2p-3}{3}}} (x - g_0)^p = N_p \frac{\left(-\frac{A_1}{3}\right)^{p-1} (x - g_0)^p}{(-A_0)^{\frac{2p-3}{3}} (x_1 - g_0)^p},$$

und die Convergenzbedingung für $x = x_1$:

$$\text{Mod.} \left(-\frac{A_1}{3}\right)^3 < \text{Mod.} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2$$

fällt wiederum mit dem bekannten Werthe der Discriminante zusammen. Auch hier werden wir sehen, dass bei einer von den übrigen mit der unsrigen ein System cyklischer Gleichungen bildenden Gleichung diese Beschränkung leicht aufgehoben werden kann.

e) Die Frage, wie unsere Hauptlösung mit der bekannten Lösung mit Hilfe von Radicalen zusammenhängt, ist hier sehr leicht zu beantworten.

Nach den Betrachtungen des zweiten Capitels in diesem Abschnitte, in Betreff der inversen Functionen, haben wir gesehen, dass man den Zahlencoefficienten im allgemeinen Falle ($m = m$) in der Form

$$N_p = \frac{\prod_{\lambda=0}^{p-2} (p - \lambda m)}{p!} = \frac{m^{p-1}}{p} \binom{\frac{p}{m}}{p-1}$$

schreiben kann, und durch sehr einfache Umformungen kommt man für $m = 3$ zu den zwei Formeln:

$$N_{3q+1} = \binom{-\left(\frac{3q-1}{3}\right)}{q} \frac{1}{3q-1};$$

$$N_{3q+2} = \binom{-\left(\frac{3q+1}{3}\right)}{q} \frac{1}{3q+1}; \text{ für } (q > 1),$$

woraus sofort ersichtlich wird, dass die drei Partialfunctionen unserer Hauptfunction unter der obigen Convergenzbedingung (die für alle drei Partialfunctionen dieselbe bleibt) in geschlossener Form als drei verschiedene Radicale mit dem Exponenten 3 auftreten, deren Summe (nach geschehener Multiplication eines jeden Summanden, respective mit r_3^{ih}) die drei Wurzeln (also wirklich durch die circumplexen Functionen) liefern. (Vgl. die Gleichung zweiten Grades und das erste Capitel des dritten Abschnittes; ebenso wie den Salzburger Vortrag § 2, *b*.)

B. *Die erste cyklische Gleichung.*

Es sei die Gleichung

$$z^3 + \varphi_{2,1}(x - g_1) z^2 + \varphi_{1,1}(x - g_1) z + \varphi_{0,1}(x - g_1) = 0$$

gegeben und es wird jetzt gefragt, wie müssen die Coefficienten $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{0,1}$, beschaffen sein, damit die mit $r_3^{-1.0}$, $r_3^{-1.1}$, $r_3^{-1.2}$ respective multiplicirten circumplexen Functionen von $f(x)$, wenn

$$f_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

bedeutet, für jeden Werth von x in der Umgebung von $x = g_1$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung repräsentiren.

Man bekommt hier die drei Gleichungen:

$$(0) \qquad \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \\ p_0 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} + \varphi_{0,1}(x - g_1) = 0,$$

$$(1) \qquad 3\begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_2 & p_1 \end{vmatrix} - \varphi_{1,1}(x - g_1) = 0,$$

$$(2) \qquad 3p_1 + \varphi_{2,1}(x - g_1) = 0,$$

von welchen die erste genau so beschaffen ist, wie im Falle A; weil die Determinante $(p_1^3 + p_2^3 + p_0^3 - 3p_1 p_2 p_0)$ symmetrisch in Bezug auf p_0, p_1, p_2 ist; wie es übrigens auch deshalb kommen muss, da $\varphi_{0,1}$ das Product aller drei Wurzeln darstellt und $r_3^{-1.0} \cdot r_3^{-1.1} \cdot r_3^{-1.2} = 1$ ist. Man kann also die Gleichung (0) für unseren Fall direct aus (0) in A erhalten, wenn man a durch b und α durch β ersetzt.

Dagegen ändert sich (1), indem anstatt jener *nullten* Partialfunction 3ter Classe eine *zweite* Partialfunction derselben Classe, nämlich

$$(1)\quad 0 = 3\Big[(-b_0 b_2 + b_1^2 - \beta_{1,2})(x-g_1)^2 + \\ + (-b_0 b_5 + 2b_1 b_4 - b_2 b_3 - \beta_{1,5})(x-g_1)^5 + \\ + (-b_0 b_8 + 2b_1 b_7 - b_2 b_6 - b_3 b_5 + b_4^2 - \beta_{1,8})(x-g_1)^8 \\ + (-b_0 b_{11} + 2b_1 b_{10} - b_2 b_9 - b_3 b_8 + 2b_4 b_7 - b_5 b_6 - \beta_{1,11})(x-g_1)^{11} + \cdots\Big]$$

und ebenso tritt anstatt der *nullten* Partialfunction 3ter Classe (2) in A, hier eine *erste* Partialfunction derselben Classe:

$$(2)\quad 0 = 3\Big[(b_1 + \beta_{2,1})(x-g_1) + (b_4 + \beta_{2,4})(x-g_1)^4 + \\ + (b_7 + \beta_{2,7})(x-g_1)^7 + (b_{10} + \beta_{2,10})(x-g_1)^{10} + \cdots\Big],$$

wonach die b, deren Indices die Congruenz $J \equiv 1 \pmod{3}$ befriedigen, direct aus (2) bestimmt werden, nämlich

$$b_{3q+1} = -\beta_{2,3q+1}$$

Dann hat man aus (0) die einzige binomische Gleichung

$$b_0^3 = -\beta_{0,3};$$

und aus (1) $b_2 = \dfrac{\beta_{2,1}^2 - \beta_{1,2}}{b_0}$.

Dann liefert der Coefficient von $(x-g_1)^3$ in (0)

$$b_3 = \frac{3b_0 b_1 b_2 - b_1^3 - \beta_{0,3}}{3b_0^2} = \frac{3\beta_{2,1}\beta_{1,2} - 2\beta_{2,1}^3 - \beta_{0,3}}{3b_0^2},$$

und darauf aus dem Coefficienten von $(x-g_1)^5$ in (1):

$$b_5 = \frac{2b_1 b_4 - b_2 b_3 - \beta_{1,5}}{b_0}$$

etc.

Bei dem Werthe für b_3 bemerkt man, dass genau derselbe Ausdruck für a_3 (in A) in Bezug auf die a mit kleinern Indices sich ergab; dieses gilt aber auch von allen b, deren Indices die Congruenz $J \equiv 0 \pmod{3}$ (ja allgemeiner bei der Gleichung n^{ten} Grades für b_J, wenn $J \equiv 0 \pmod{n}$); immer ist ein solches b in allen cyklischen Gleichungen eine und dieselbe Function aller b mit niedern Indices (wenn n ungerade ist und wenn n gerade ist, tritt nur ein Unterschied im Vorzeichen auf). Der Grund dafür ist der, dass b_{qn} (nach der obigen allgemeinen Theorie) durch die Gleichung (0) als Function aller vorhergehenden Coefficienten, und (0) ist für ungerade n dieselbe bei allen cyklischen Gleichungen, und für ein gerades n wechselt die Determinante das Vorzeichen.

Bedeutend einfacher wird die Rechnung für die übrigen Coefficienten beim speciellen Falle

$$\varphi_{0,1} = \beta_{0,0}^3 + \beta_{0,3}(x - g_1)^3,$$
$$\varphi_{1,1} = 3\beta_{1,2}(x - g_1)^2,$$
$$\varphi_{2,1} = 3\beta_{2,1}(x - g_1),$$

so dass alle β, bei denen der erste Index grösser als 3 ist, identisch Null sind. Aus (2) folgt dann

$$b_1 = -\beta_{2,1}; \quad \text{und} \quad b_{3q+1} = 0 \text{ für } q > 0;$$

und (1) nimmt die einfachere Form an:

$$0 = (b_1^2 - b_0 b_2 - \beta_{1,2})(x - g_1)^2 - (b_0 b_5 + b_3 b_2)(x - g_1)^5 -$$
$$-(b_0 b_8 + b_3 b_5 + b_6 b_2)(x - g_1)^8 - (b_0 b_1 + b_3 b_8 + b_6 b_5 + b_9 b_2)$$
$$\times (x - g_1)^{11} - \cdots$$

so dass für alle Coefficienten, deren Indices die Congruenz $J \equiv 2 \pmod{3}$ befriedigen, das Gesetz besteht:

$$b_{3q+2} = -\frac{b_3 b_{3q-1} + b_6 b_{3q-4} + \cdots + b_{3q} b_2}{b_0}.$$

Ebenso vereinfacht sich die Gleichung (0), so dass die daraus entspringenden Werthe für die Coefficienten, deren Indices $J \equiv 0 \pmod{3}$ befriedigen, die Form haben

$$b_6 = -\frac{3b_0b_3^2 + b_2^3}{3b_0^2}; \quad b_9 = -\frac{6b_0b_3b_6 + 3b_2^2b_5 + b_3^3}{3b_0^2};$$

$$b_{12} = -\frac{6b_0b_3b_9 + 3b_2^2b_8 + 3b_0b_6^2 + 3b_2b_5^2 + 3b_3^2b_6}{3b_0^2};$$

etc.

Im Falle A. haben wir eine weitere Vereinfachung der wirklichen Berechnung durch eine Specialisirung $a_3 = 0$ erreicht; um nun nachzusehen, welchen Einfluss die Annahme $b_3 = 0$ in unserm Falle B. haben würde, überlegen wir Folgendes.

Jedenfalls kann man sich die soeben angeführten Werthe successive eingesetzt denken, so dass jedes b mit höherem Index eine rationale Function von b_0, b_1, b_2, b_3 sein wird, in deren Nenner nur b_0 vorkommen kann, weil da, wo ein b mit einem so hohen Index in den Gleichungen (0) und (1) zum ersten Male auftritt, dasselbe, nach der obigen Theorie, nur mit b_0 behaftet erscheint*), welches bei der entsprechenden Berechnung des betreffenden b dann in den Nenner der rechten Seite tritt. Nun sehen wir zunächst, dass in der Gleichung (1), welche dazu dient, diejenigen b_p zu bestimmen, bei denen $p \equiv 2 \pmod{3}$ ist, alle Glieder von der zweiten Dimension und vom Gewichte $G \equiv 2 \pmod{3}$ sind. Nehmen wir nun an, es existire darin ein Glied

$$Mb_1 b_q,$$

so muss offenbar $1 + q \equiv 2 \pmod{3}$, oder,

$$q \equiv 1 \pmod{3}$$

sein. Nun ist aber in unserem Falle speciell

$$\varphi_{2,1}(x) = 3\beta_{2,1}(x - g_1),$$

so dass die b mit dem Index $J \equiv 1 \pmod{3}$ für $J > 1$ verschwinden. Mithin wird in (1) ein einziges solches Glied $Mb_1 b_q$ nur vorkommen können für $q = 1$, also Mb_1^2 in

*) So wird z. B. b_{3s+2} aus dem Coefficienten von x^{3s+2} bestimmt, und es ist nicht möglich, dass darin ein Glied von der Form

$$b_{3s+2}\, b_3^\alpha\, b_2^\beta\, b_1^\gamma\, b_0^\delta$$

mit positiven α, β, γ vorkommen soll, da das Gewicht grösser als $3s + 2$ sein würde und negative α, β, γ können in (1) überhaupt nicht vorkommen; es muss also $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$ sein.

dem Coefficienten von x^2, während in allen andern Gliedern $b_q = 0$ ist, so dass gar kein b_1 mehr vorkommen kann. Es wird mithin b_{3s+2} die Form haben

$$(w) \qquad b_{3s+2} = \sum_{\varrho} M_{\varrho} b_3^{\lambda_{\varrho}} b_2^{\mu_{\varrho}} b_0^{\nu_{\varrho}},$$

wobei M_{ϱ} ein Zahlencoefficient ist, und das Summenzeichen sich auf alle möglichen ganzen *positiven* λ_{ϱ}, μ_{ϱ} und positiven, wie negativen ν_{ϱ} bezieht, welche die Bedingungen

$$\lambda_{\varrho} + \mu_{\varrho} + \nu_{\varrho} = 1$$
$$3\lambda_{\varrho} + 2\mu_{\varrho} = 3s + 2$$

erfüllen.

Daraus ersehen wir sofort, dass $\lambda_{\varrho} = 0$; d. h.:

$$\mu_{\varrho} = \frac{3s+2}{2} = \frac{3}{2}s + 1$$

nur für gerade s möglich ist; und für $s = 2p$ ist dann wirklich *ein* Werthsystem, aber nur *eines*

$$(w') \qquad \lambda = 0; \quad \mu = 3p + 1; \quad \nu = -3p$$

vorhanden. In allen übrigen $b_{3(2p+1)+2}$ müssen also *alle* Glieder mit b_3 behaftet sein und wenn $b_3 = 0$ gesetzt wird, verschwinden alle b_{3s+2}, in denen s eine ungerade Zahl ist, *ganz* und diejenigen Glieder der gesuchten Reihe mit geradem $s = 2p$ bestehen nach (w') aus einem einzigen Gliede von der Form

$$b_{6p+2}(x - g_1)^{6p+2} = N_{3p+1} \cdot \frac{b_2^{3p+1}(x-g_1)^{6p+2}}{b_0^{3p}};$$

d. h. *die zweite Partialfunction dritter Classe unserer Hauptfunction $f(x-g_1)$ ist in unserem speciellen Falle eine zweite Partialfunction sechster Classe, oder eine erste Partialfunction dritter Classe einer Function von $(x-g_1)^2$.*

Der Zahlencoefficient N_p lässt sich ebenso wie im Falle A. bestimmen und ganz analoge Betrachtungen wie für $n=2$ lassen sich auch hier durchführen.

Ganz genau wie vorhin lässt sich beweisen, dass

$$b_{6p+3} = 0 \quad \text{und} \quad b_{6p} = N_{3p} \frac{b_2^{3p}}{b_0^{3p-1}}$$

wird; *also die* **nullte** *Partialfunction* **dritter** *Classe wird in unserem speciellen Falle eine nullte Partialfunction* **sechster** *Classe einer Function von* $(x - g_1)$ *oder eine nullte Partialfunction* **dritter** *Classe einer Function von* $(x - g_1)^2$.

C. *Die zweite cyklische Gleichung.*

Es sei nun eine Gleichung

$$z^3 + \varphi_{2,2}(x-g_2)\, z^2 + \varphi_{1,2}(x-g_2)\, z + \varphi_{0,2}(x-g_2) = 0$$

gegeben und es wird diesmal verlangt, dass in einem Gebiete um $x = g_2$ die mit r_3^{-2h} multiplicirten h^{ten} circumplexen Functionen $(h = 0, 1, 2)$ von $f(x - g_2)$ für jeden Werth von x die drei Wurzeln liefern sollen.

Die Gleichungen haben jetzt die Form:

$$(0) \qquad \begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 \\ p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \end{vmatrix} + \varphi_{0,2}(x - g_2) = 0,$$

$$(1) \qquad 3\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix} - \varphi_{1,2}(x - g_2) = 0,$$

$$(2) \qquad 3p_2 + \varphi_{2,2}(x - g_2) = 0;$$

und wiederum hat (0) genau dieselbe Beschaffenheit wie in A. und B. (also dieselbe *nullte* Partialfunction dritter Classe zu sein wie dort); während (1) jetzt eine **erste** Partialfunction dritter Classe wird, nämlich

$$\begin{aligned}(1) \quad 0 = -3\Big[&(c_0c_1+\gamma_{2,1})(x-g_2)+(c_0c_4+c_1c_3-c_2{}^2+\gamma_{2,4})(x-g_2)^4\\ &+(c_0c_7+c_1c_6-2c_2c_5+c_3c_4+\gamma_{2,7})(x-g_2)^7\\ &+(c_0c_{10}+c_1c_9-2c_2c_8+c_3c_7+c_4c_6-c_5{}^2+\gamma_{2,10})(x-g_2)^{10}\\ &+(c_0c_{13}+c_1c_{12}-2c_2c_{11}+c_3c_{10}+c_4c_9-2c_5c_8+c_6c_7+\gamma_{2,13})(x-g_2)^{13}\\ &+\text{etc.}\Big]\end{aligned}$$

(Das Bildungsgesetz ist klar; höchstens dürfte noch die Bemerkung in Betreff des Vorzeichens und des Zahlencoefficienten nicht überflüssig sein: es haben nämlich nur diejenigen Glieder in der Klammer das negative Vorzeichen, deren *beide* Factoren Indices besitzen, welche die Congruenz

$J \equiv 2 (\mathrm{mod.}\ 3)$ befriedigen, und nur solche Glieder haben noch den Coefficienten 2, falls beide Factoren von einander verschieden sind; die Ursache liegt darin, dass nur p_2 im Quadrate vorkommt.)

Die Gleichung (2) wird diesmal eine *zweite* Partialfunction dritter Classe, nämlich:

$$(2) \quad 0 = 3\,[(c_2 + \gamma_{2,2})(x - g_2)^2 + (c_5 + \gamma_{2,5})(x - g_2)^5 + (c_8 + \gamma_{2,8})(x - g_2)^8 + \cdots + (c_{(3q+2)} + \gamma_{2,3q+2})(x - g_2)^{3q+2} + \cdots].$$

Aus (2) werden also in diesem Falle alle diejenigen c direct bestimmt, deren Indices die Congruenz $J \equiv 2$ (mod. 3) befriedigen und für die übrigen Coefficienten hat man folgende gruppenweise Bestimmungen.

Zunächst erhält man aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^0$ in (0) die binomische Gleichung

$$c_0^3 + \gamma_{2,0}^3 = 0;$$

dann aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^1$ in (1)

$$c_1 = -\frac{\gamma_{2,1}}{c_0};$$

darauf wieder aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^3$ in (0), *wie oben:*

$$c_3 = \frac{3 c_0 c_1 c_2 - c_1^3 - \gamma_{2,3}}{3 c_0^2}$$

und dann wieder aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^4$ in (1)

$$c_4 = -\frac{c_1 c_3 - c_2^2 + \gamma_{2,4}}{c_0}.$$

Ferner c_6 (allgemein c_{3q}) *genau wie oben* im allgemeinen Falle in A oder B (weil diese Bestimmung aus (0) getroffen wird, welche für alle drei cyklischen Gleichungen dieselbe bleibt), dann wieder aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^7$ in (1)

$$c_7 = -\frac{c_1 c_6 + c_3 c_4 - 2 c_2 c_5 + \gamma_{2,7}}{c_0}$$

etc.

Für den speciellen Fall

$$\varphi_{0,2}(x - g_2) = \gamma_{2,0}^3 + \gamma_{2,3}(x - g_2)^3$$
$$\varphi_{1,2}(x - g_2) = \qquad 3\gamma_{2,1}(x - g_2)$$
$$\varphi_{2,2}(x - g_2) = \qquad 3\gamma_{2,2}(x - g_2)^2$$

ergiebt sich die einfachere Bestimmung

$$c_0{}^3 = -\gamma_{2,0}^3;\quad c_1 = -\frac{\gamma_{2,1}}{c_0};\quad c_2 = -\gamma_{2,2},$$

$$c_3 = \frac{3c_0c_1c_2 - c_1{}^3 - \gamma_{0,3}}{3c_0{}^2};\quad c_4 = \frac{c_2{}^2 - c_1c_3}{c_0};\quad c_5 = 0$$

etc.

Und ganz analoge Betrachtungen wie im Fall B. lassen sich auch hieran knüpfen; ebenso ist auch die Möglichkeit leicht nachzuweisen, dass wenn eine gegebene Gleichung mit constanten Coefficienten zu lösen ist, man immer eine des vollständigen Systems der nach der obigen Methode gelösten cyklischen Gleichungen so einrichten kann, dass die allgemeine Lösung für die speciell gegebene Gleichung passen soll. (An anderer Stelle wird gezeigt werden, dass sogar jede gegebene allgemeinste Gleichung, deren Coefficienten $\psi(x)$ beliebige Potenzreihen sind, ebenfalls auf einen der Fälle jenes vollständigen cyklischen Systemes zurückgeführt werden kann.)

§ 14.

Gleichung vierten Grades.

Sei nun die Gleichung vierten Grades

$$F(z, x) = z^4 + \varphi_3(x)z^3 + \varphi_2(x)z^2 + \varphi_1(x)z + \varphi_0(x) = 0$$

gegeben, wobei die Coefficienten die Functionen

$$\varphi_0(x) = \alpha_{0,0}^4 + \alpha_{0,4}x^4$$
$$\varphi_1(x) = 4\alpha_{0,0}^3 + 4\alpha_{1,4}x^4$$
$$\varphi_2(x) = 6\alpha_{0,0}^2 + 4\alpha_{2,4}x^4$$
$$\varphi_3(x) = 4\alpha_{0,0} + 4\alpha_{3,4}x^4$$

bedeuten, und es werde verlangt, dass in der Umgebung von $x = 0$ die circumplexen Functionen von

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

$J \equiv 2 (\text{mod. } 3)$ befriedigen, und nur solche Glieder haben noch den Coefficienten 2, falls beide Factoren von einander verschieden sind; die Ursache liegt darin, dass nur p_2 im Quadrate vorkommt.)

Die Gleichung (2) wird diesmal eine *zweite* Partialfunction dritter Classe, nämlich:

$$(2) \quad 0 = 3 \, [(c_2 + \gamma_{2,2}) (x - g_2)^2 + (c_5 + \gamma_{2,5}) (x - g_2)^5 + (c_8 + \gamma_{2,8}) (x - g_2)^8 + \cdots + (c_{(3q+2)} + \gamma_{2,3q+2}) (x - g_2)^{3q+2} + \cdots].$$

Aus (2) werden also in diesem Falle alle diejenigen c direct bestimmt, deren Indices die Congruenz $J \equiv 2$ (mod. 3) befriedigen und für die übrigen Coefficienten hat man folgende gruppenweise Bestimmungen.

Zunächst erhält man aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^0$ in (0) die binomische Gleichung

$$c_0^3 + \gamma_{2,0}^3 = 0;$$

dann aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^1$ in (1)

$$c_1 = - \frac{\gamma_{2,1}}{c_0};$$

darauf wieder aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^3$ in (0), *wie oben:*

$$c_3 = \frac{3 c_0 c_1 c_2 - c_1^3 - \gamma_{2,3}}{3 c_0^2}$$

und dann wieder aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^4$ in (1)

$$c_4 = - \frac{c_1 c_3 - c_2^2 + \gamma_{2,4}}{c_0}.$$

Ferner c_6 (allgemein c_{3q}) *genau wie oben* im allgemeinen Falle in A oder B (weil diese Bestimmung aus (0) getroffen wird, welche für alle drei cyklischen Gleichungen dieselbe bleibt), dann wieder aus dem Coefficienten von $(x - g_2)^7$ in (1)

$$c_7 = - \frac{c_1 c_6 + c_3 c_4 - 2 c_2 c_5 + \gamma_{2,7}}{c_0}$$

etc.

Für den speciellen Fall

$$\varphi_{0,2}(x-g_2) = \gamma^3_{2,0} + \gamma_{2,3}(x-g_2)^3$$
$$\varphi_{1,2}(x-g_2) = \qquad 3\gamma_{2,1}(x-g_2)$$
$$\varphi_{2,2}(x-g_2) = \qquad 3\gamma_{2,2}(x-g_2)^2$$

ergiebt sich die einfachere Bestimmung

$$c_0^3 = -\gamma^3_{2,0};\ c_1 = -\frac{\gamma_{2,1}}{c_0};\ c_2 = -\gamma_{2,2},$$

$$c_3 = \frac{3c_0c_1c_2 - c_1^3 - \gamma_{0,3}}{3c_0^2};\ c_4 = \frac{c_2^2 - c_1c_3}{c_0};\ c_5 = 0$$

etc.

Und ganz analoge Betrachtungen wie im Fall B. lassen sich auch hieran knüpfen; ebenso ist auch die Möglichkeit leicht nachzuweisen, dass wenn eine gegebene Gleichung mit constanten Coefficienten zu lösen ist, man immer eine des vollständigen Systems der nach der obigen Methode gelösten cyklischen Gleichungen so einrichten kann, dass die allgemeine Lösung für die speciell gegebene Gleichung passen soll.

(An anderer Stelle wird gezeigt werden, dass sogar jede gegebene allgemeinste Gleichung, deren Coefficienten $\psi(x)$ beliebige Potenzreihen sind, ebenfalls auf einen der Fälle jenes vollständigen cyklischen Systemes zurückgeführt werden kann.)

§ 14.

Gleichung vierten Grades.

Sei nun die Gleichung vierten Grades

$$F(z,x) = z^4 + \varphi_3(x)z^3 + \varphi_2(x)z^2 + \varphi_1(x)z + \varphi_0(x) = 0$$

gegeben, wobei die Coefficienten die Functionen

$$\varphi_0(x) = \alpha^4_{0,0} + \alpha_{0,4}x^4$$
$$\varphi_1(x) = 4\alpha^3_{0,0} + 4\alpha_{1,4}x^4$$
$$\varphi_2(x) = 6\alpha^2_{0,0} + 4\alpha_{2,4}x^4$$
$$\varphi_3(x) = 4\alpha_{0,0} + 4\alpha_{3,4}x^4$$

bedeuten, und es werde verlangt, dass in der Umgebung von $x=0$ die circumplexen Functionen von

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

für jeden Werth von x die Wurzeln von $F(z, x) = 0$ darstellen sollen, so hat man aus den identischen Gleichungen

$$(0) \qquad 0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_3 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} - \varphi_0(x)$$

$$(1) \qquad 0 = 4 \begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_0 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + \varphi_1(x)$$

$$(2) \qquad 0 = 4 \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_2 & p_0 \end{vmatrix} - \varphi_2(x)$$

$$(3) \qquad 0 = 4p_0 + \varphi_3(x)$$

die gesuchten a zu bestimmen.

Und wieder bestimmen sich aus (3) diejenigen a, deren Indices $J \equiv 0 \pmod{4}$ sind, direct als identisch mit den entsprechenden α in $\varphi_3(x)$, so dass in unserem Falle

$$p_0 = -\alpha_{0,0} - \alpha_{3,4} x^4$$

ist, also alle $\alpha_{4q} = 0$ sind, bei denen $q > 1$ ist, und nur $a_0 = -\alpha_{0,0}$ und $a_4 = -\alpha_{3,4}$.

Aus (2)

$$3p_0^2 - 2p_1p_3 - p_2^2 - 3\alpha_{0,0} - 2\alpha_{2,4}x^4 = 0$$

hat man ferner die Gleichungen:

$a_2^2 + 2a_1a_3 = 6\alpha_{0,0}\alpha_{3,4} - 2\alpha_{2,4}$ aus den Coefficienten von x^4

$a_1a_2 + a_2a_6 + a_3a_5 = \frac{3}{2}\alpha_{3,4}^2$ „ „ „ „ x^8

$2a_1a_{11} + 2a_2a_{10} + 2a_3a_9 + 2a_5a_7 + a_6^2 = 0$ aus den Coefficienten von x^{12}

$a_1a_{15} + a_2a_{14} + a_3a_{13} + a_5a_{11} + a_6a_{10} + a_7a_9 = 0$ aus den Coefficienten von x^{16}

$2a_1a_{19} + 2a_2a_{18} + 2a_3a_{17} + 2a_5a_{15} + 2a_6a_{14} + 2a_7a_{13} + 2a_9a_{11} + a_{10}^2 = 0$ aus den Coefficienten von x^{20}.

Die Gleichung (1) kann man so schreiben:

(1) $$p_2(p_1^2 + p_3^2) + p_0[3p_0^2 - 2p_1p_3 - p_2^2] \\ - 2p_0^3 + \overset{3}{\alpha}_{0,0} + \alpha_{1,4}x^4 = 0,$$

und man bemerkt sofort, dass die Rechnung ganz bedeutend vereinfacht wird, wenn man in dem von z unabhängigen Gliede der Gleichung den speciellen Fall nimmt

$$\alpha_{3,4} = 0,$$

was für den Zweck der allgemeinen Lösung der Gleichung mit constanten Coefficienten vollkommen ausreicht. Es wird nämlich dann

$$\begin{cases} \varphi_3(x) = \quad 4\alpha_{0,0} \\ \quad p_0 = -\alpha_{0,0}\,; \end{cases}$$

die Gleichung (2) wird dadurch etwas einfacher; die Hauptsache ist aber, dass die Gleichungen (1) und (0) ganz bedeutend einfacher werden; denn der Klammerinhalt in (1) kann auf die Glieder, deren Exponenten grösser als vier sind, keinen Einfluss ausüben, weil dieselben auf Grund von (2) identisch verschwinden, und es bleibt nur noch (weil unter der genannten Bedingung

$$3p_0^3 - 2p_0^3 + \overset{3}{\alpha}_{0,0} = 0$$

ist) die einfachere Gleichung

(1) $$p_2(p_1^2 + p_3^2) + (\alpha_{1,4} + 2\alpha_{2,4})\,x^4 = 0.$$

Daraus ergeben sich die Systeme von Gleichungen

$$a_1^2 a_2 = -\alpha_{1,4} - 2\alpha_{2,4} \qquad \text{aus den Coefficienten von } x^4$$

$$a_1^2 a_6 + 2a_1a_2a_5 = a_2a_3^2 \qquad \text{„ „ „ „ } x^8$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 a_{10} + 2a_1a_2a_9 = &- 2a_1a_5a_6 \\ &- 2a_2a_3a_7 \\ &- a_3^2a_6 \\ &- a_2a_5^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{„ „ „ „ } x^{12}$$

etc. etc.

Unter der gemachten Voraussetzung $p_0 = -\alpha_{0,0}$ bekommt man aus (0) folgende Gleichungen:

$$-a_1^4 + 4\overset{2}{\alpha}_{0,0}\alpha_{2,4} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,4} + 8\alpha_{0,0}\alpha_{2,4} - \alpha_{0,4} = 0$$

aus den Coefficienten von x^4,

$$3a_2^4 - 4a_1^3 a_5 + 2a_1^2 a_3^2 + 4a_2^2 \alpha_{2,4} = 0$$

aus den Coefficienten von x^8,

$$-4a_1^3 a_9 + 12a_2^3 a_6 - 6a_1^2 a_5^2 - a_3^4 + 4a_1^2 a_3 a_7 + 4a_1 a_3^2 a_5 + 8a_2 a_6 \alpha_{2,4} = 0$$

aus den Coefficienten von x^{12},

etc.

Die Coefficienten von x^4 liefern also eine binomische Gleichung für a_1

$$\text{aus } (0') \quad a_1^4 = \mathfrak{A}_1 = 4\left[3\alpha_{0,0}^2 \alpha_{2,4} + \alpha_{0,0}(\alpha_{1,4})\right] - \alpha_{0,4} = 12\,\alpha_{0,0}^2 \alpha_{2,4} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,4} - \alpha_{0,4},$$

$$\text{dann aus } (1') \quad a_2 = -\frac{(\alpha_{1,4} + 2\alpha_{2,4})}{a_1^2},$$

$$\text{und aus } (2') \quad a_3 = -\frac{2\alpha_{2,4} + a_2^2}{2a_1}.$$

Dann liefern die Coefficienten von x^8 drei lineare Gleichungen zur Bestimmung von a_5, a_6, a_7; es folgt nämlich:

$$\text{aus } (0') \quad a_5 = \frac{2a_1^2 a_3^2 + 4a_2^2 \alpha_{2,4} + 3a_2^4}{4a_1^3} = \frac{2a_1^2 a_3^2 - 4a_1 a_2^2 a_3 + a_2^4}{4a_1^3}$$

$$= \frac{(a_2^2 - 2a_1 a_3)^2 - 2a_1^2 a_3^2}{4a_1^3},$$

$$\text{aus } (1') \quad a_6 = -\frac{2a_1 a_2 a_5 + a_2 a_3^2}{a_1^2} = -\frac{a_2}{2a_1^4}(a_2^2 - 2a_1 a_3)^2,$$

$$\text{aus } (2') \quad a_7 = -\frac{a_2 a_6 + a_3 a_5}{a_1} = \frac{(2a_2^2 - a_1 a_3)(a_2^2 - 2a_1 a_3)^2 + 2a_1^3 a_3^3}{4a_1^5}$$

$$= \frac{(2a_2^4 - 13a_2^2 a_1 a_3 + 38a_1^2 a_3^2)(a_2^2 + 2a_1 a_3) - 78a_1^3 a_3^3}{4a_1^5}.$$

Ferner erhält man aus den Coefficienten von x^{12} die linearen Gleichungen

$$\text{aus } (0') \quad a_9 = \frac{4a_1^2 a_3 a_7 + (12a_2^3 + 8a_2 \cdot \alpha_{2,4})a_6 - 6a_1^2 a_5^2 + 4a_1 a_3^2 a_5 - a_3^4}{4a_1^3},$$

$$\text{aus } (1') \quad a_{10} = -\frac{2a_1 a_2 a_9 + 2a_2 a_3 a_7 + (a_3^2 + 2a_1 a_5)a_6 + a_2 a_5^2}{a_1^2}$$

$$= -\frac{2a_1 a_2 a_9 + 2a_2 a_3 a_7 - \frac{a_1^2}{a_2} a_6^2 + a_2 a_5^2}{a_1^2},$$

$$\text{aus } (2') \quad a_{11} = -\frac{2a_2 a_{10} + 2a_3 a_9 + 2a_5 a_7 + a_6^2}{2a_1}$$

etc.

Berechnet man hieraus successive die auf einander folgenden Coefficienten, so ergiebt sich jeder weitere Coefficient, dessen Index grösser als 4 ist, ausgedrückt durch a_1, a_2, a_3 und zwar in Gestalt eines Bruches, dessen Nenner eine gewisse Potenz von a_1 und dessen Zähler immer eine ganze rationale Function von $(a_2^2 + 2a_1a_3)$ ist, wie z. B.:

$$a_5 = \frac{(a_2^2 + 2a_1a_3)^2 - a_1a_3(a_2^2 + 2a_1a_3) - 7a_1a_2^2a_3}{4a_1^3},$$

$$a_6 = -\frac{a_2(a_2^2 + 2a_1a_3)^2 - 8a_1a_3a_2^3}{2a_1^4},$$

$$a_7 = \frac{(2a_2^4 - 13a_2^2a_1a_3 + 38a_1^2a_3^2)(a_2^2 + 2a_1a_3) - 78a_1^3a_3^3}{4a_1^5}$$

etc.,

während die Grössen a_1, a_2, a_3 direct gegeben sind durch die als gegeben vorausgesetzten $\alpha_{0,0}$; $\alpha_{0,4}$; $\alpha_{1,4}$; $\alpha_{2,4}$ in den Coefficienten $\varphi_0(x)$; $\varphi_1(x)$; $\varphi_2(x)$; $\varphi_3(x)$ der gegebenen Gleichung.

Zum Zweck der Lösung einer Gleichung mit constanten Coefficienten genügt es jedoch, wie wir sehen werden, wenn wir noch weiter specialisiren, wodurch einerseits die wirkliche Berechnung bedeutend vereinfacht und andrerseits das Gesetz für die Coefficienten übersichtlicher wird. Setzen wir nämlich $a_2^2 + 2a_1a_3 = 0$, d. h. $a_3 = -\frac{1}{2}\frac{a_2^2}{a_1}$, was einfach dadurch erreicht wird, dass man $\alpha_{2,4} = 0$, also $\varphi_2(x) = 6\alpha_{0,0}^2$ annimmt, so werden in den obigen Ausdrücken nur diejenigen Glieder bestehen bleiben, welche von $(a_2^2 + 2a_1a_3)$ unabhängig sind, und wenn man darin noch den Werth

$$a_3 = -\frac{1}{2}\frac{a_2^2}{a_1}$$

einsetzt, so erhält man alle übrigen Coefficienten ausgedrückt lediglich durch a_1, a_2, nämlich

$$a_5 = \frac{7}{8}\frac{a_2^4}{a_1^3}; \qquad a_6 = -2\frac{a_2^5}{a_1^4}; \qquad a_7 = \frac{39}{16}\frac{a_2^6}{a_1^5};$$

$$a_9 = -\frac{1045}{128}\frac{a_2^8}{a_1^7}; \quad a_{10} = 22\frac{a_2^9}{a_1^8}; \quad a_{11} = -\frac{7735}{256}\frac{a_2^{10}}{a_1^9},$$

etc.

Ganz ebenso wie oben können wir auch hier nachweisen, dass allgemein sein wird

$$a_q = N_q\frac{a_2^{q-1}}{a_1^{q-2}}.$$

Da nämlich a_q jedenfalls eine rationale Function von a_1 und a_2 sein wird, so muss a_q jedenfalls die Form haben

$$a_q = \sum^{\lambda} M_\lambda a_1^{\mathfrak{l}_\lambda} a_2^{m_\lambda},$$

wobei $\mathfrak{l}_\lambda$ und m_λ positive oder negative ganze Zahlen sein werden, welche aber durch die zwei Bedingungen

$$\mathfrak{l}_\lambda + m_\lambda = 1, \quad \mathfrak{l}_\lambda + 2m_\lambda = q$$

beschränkt sind, woraus das einzig mögliche Werthepaar folgt:

$$m_\lambda = q - 1, \quad \mathfrak{l}_\lambda = -(q-2).$$

Man kann also alle diese Glieder, die sich nur in dem Zahlencoefficienten unterscheiden können (wie behauptet wurde) in der Form

$$a_q = N_q \frac{a_2^{q-1}}{a_1^{q-2}}$$

vereinigen. Was nun N_q betrifft, so kann man wiederum wie oben verfahren. Da eine Reihe $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ für ganz beliebige $\alpha_{0,0}$; $\alpha_{0,4}$; $\alpha_{1,4}$ gelten muss, so wählen wir diese Grössen so, dass $a_2 = a_1 = 1$, also: $\quad \alpha_{0,0} = -1; \quad \alpha_{0,4} = -1; \quad \alpha_{1,4} = -1.$

(Allerdings kann dabei noch immer a_1 eine h^{te} $(h=0,1,2,3)$ Potenz von $\sqrt{-1} = r_4$ sein, da zur Bestimmung von a_1 überhaupt eine binomische Gleichung 4ten Grades vorhanden ist; wir wählen der Einfachheit wegen $h = 0$.) In diesem Falle wird also unser

$$z = 0 + N_1 x + N_2 x^2 + N_3 x^3 + \cdots$$

Unsere Gleichung nimmt aber dann die Gestalt an

$$z^4 - 4x^4 z - x^4 = 0,$$

und man bekommt für diesen Fall wie oben

$$N_p = \frac{\prod\limits_{0}^{p-2}{}^{\lambda} (p - 4\lambda)}{p!};$$

oder entsprechend den 4 Partialfunctionen: $N_{4s} = 0$ und

$$N_{4s+1} = (-1)^s \binom{\frac{-(4s+3)}{4}}{2s-1} \frac{2^{2(s-1)}}{2s};$$

$$N_{4s+2} = \binom{\frac{-(4s+1)}{2}}{s-1} \frac{(-2)^{2s-1}}{s};$$

$$N_{4s+3} = (-1)^{s+1} \binom{\frac{-(4(s+1)+1)}{4}}{2s} \frac{2^{2s-1}}{2s+1},$$

so dass man, übereinstimmend mit den obigen Zahlen, wirklich hat:

$$a_1^{\,4} = -\alpha_{0,4} \quad ; \quad a_2 = -\frac{\alpha_{1,4}}{a_1^2} \quad ; \quad a_3 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_{1,4}^2}{a_1^3} \quad ;$$

ferner:

$$a_5 = -\binom{\frac{-7}{4}}{1} \frac{2^0}{2} \frac{a_2^4}{a_1^2}; \quad a_6 = -\binom{\frac{-5}{2}}{0} \frac{(-2)^1}{1} \frac{a_2^5}{a_1^4}; \quad a_7 = -\binom{\frac{-9}{4}}{2} \frac{2}{3} \frac{a_2^6}{a_1^5};$$

und

$$a_9 = \binom{\frac{-11}{4}}{3} \frac{2^2}{4} \frac{a_2^8}{a_1^7}; \quad a_{10} = \binom{\frac{-11}{2}}{1} \frac{(-2)^3}{2} \frac{a_2^9}{a_1^8}; \quad a_{11} = -\binom{\frac{-13}{4}}{4} \frac{2^3}{5} \frac{a_2^{10}}{a_1^9},$$

etc.

Man überzeugt sich auch hier in ganz derselben Weise wie oben, dass der Convergenzkreis bis zum nächsten Verzweigungspunkt sich erstreckt (und zwar ohne Hilfe der Differentialrechnung).

Ebenso wie oben werden die andern drei Gleichungen zu lösen sein, welche mit der unserigen das cyklische System bilden. Es wird sich dabei herausstellen, dass allgemein die $\mathfrak{l}^{\text{te}}$ cyklische Gleichung, d. h. diejenige

$$F_{\mathfrak{l}}(z, x) = z^4 + \varphi_{3,\mathfrak{l}}(x) z^3 + \varphi_{2,\mathfrak{l}}(x) z^2 + \varphi_{1,\mathfrak{l}}(x) z + \varphi_{0,\mathfrak{l}}(x) = 0,$$

für welche verlangt wird, dass in der Umgebung des Nullpunktes für jeden Werth von x

$$r_4^{-0.\mathfrak{l}} f(r_4^0 x), \quad r_4^{-1.\mathfrak{l}} f(r_4^1 x), \quad r_4^{-2.\mathfrak{l}} f(r_4^2 x), \quad r_4^{-3.\mathfrak{l}} f(r_4^3 x)$$

die Wurzeln repräsentiren sollen, die Coefficienten

$$\varphi_{0,\mathfrak{l}}(x); \quad \varphi_{1,\mathfrak{l}}(x); \quad \varphi_{2,\mathfrak{l}}(x); \quad \varphi_{3,\mathfrak{l}}(x)$$

resp. eine $0(4-\mathfrak{l})^{\text{te}}$; $1(4-\mathfrak{l})^{\text{te}}$; $2(4-\mathfrak{l})^{\text{te}}$; $3(4-\mathfrak{l})^{\text{te}}$ Partialfunction 4ter Classe sein müssen, d. h. die Exponenten der

entsprechenden Potenzreihen respective dieselben Reste nach dem Modul 4 lassen, wie die Grössen:

$$0(4-\mathfrak{l});\quad 1(4-\mathfrak{l});\quad 2(4-\mathfrak{l});\quad 3(4-\mathfrak{l}).$$

Ferner wird es ebenso wie oben möglich sein, für jede gegebene Gleichung mit constanten Coefficienten (an anderer Stelle wird die Erweiterung für beliebige Coefficienten, welche als Potenzreihen dargestellt werden können, gezeigt werden) *eine* Gleichung des vollständigen Systems, welche eben auf die obige Weise gelöst worden ist, durch Specialisirung der willkürlichen Constanten so einzurichten, dass die gesuchte Lösung darin enthalten sein wird.

§ 15.

Gleichung fünften Grades.

A. *Nullte Gleichung des cyklischen Systems;* $l = 0$.

Es sei nun die nullte cyklische Gleichung 5ten Grades, und zwar zunächst die trinomische

$$F(z, x) = z^5 + \varphi_1(x)z + \varphi_0(x) = 0,$$

auf welche Form man bekanntlich die allgemeine Gleichung 5ten Grades durch die Tschirnhausen-Jerrard'sche Transformationsmethode immer durch Auflösung einer niedrigern Gleichung bringen kann, gegeben, wobei also

$$\varphi_4(x) = 0;\quad \varphi_3(x) = 0;\quad \varphi_2(x) = 0$$

und die zwei noch übrig bleibenden Coefficienten gewisse in einem gemeinsamen Gebiete convergirende Potenzreihen

$$\varphi_1(x) = 5\alpha_{1,5}x^5 + 5\alpha_{1,10}x^{10} + \alpha_{1,15}x^{15} + \cdots$$
$$\varphi_0(x) = \alpha_{0,5}x^5 + \alpha_{0,10}x^{10} + \alpha_{0,15}x^{15} + \cdots$$

sind; und es sollen die fünf circumplexen Functionen

$$f(r_5{}^0x);\quad f(r_5{}^1x);\quad f(r_5{}^2x);\quad f(r_5{}^3x);\quad f(r_5{}^4x)$$

einer gewissen Hauptfunction $f(x)$ direct für jedes x innerhalb des Convergenzgebietes die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen.

Aus

$$\varphi_4(x) = 0, \text{ woraus (4) } p_0 = 0$$

folgt, ersieht man zunächst, dass alle Coefficienten der gesuchten Potenzreihe, deren Indices durch 5 theilbar sind, identisch verschwinden.

Ferner hat man

$$(0)\qquad \begin{vmatrix} 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & 0 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & 0 & p_4 & p_3 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 0 & p_4 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 \end{vmatrix} + \varphi_0(x) = 0,$$

$$(1)\qquad 5\begin{vmatrix} 0 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_1 & 0 & p_4 & p_3 \\ p_2 & p_1 & 0 & p_4 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 0 \end{vmatrix} - \varphi_1(x) = 0,$$

$$(2)\qquad 5\begin{vmatrix} 0 & p_4 & p_3 \\ p_1 & 0 & p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & p_3 & p_1 \\ p_2 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3)\qquad 5\begin{vmatrix} 0 & p_4 \\ p_1 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & p_3 \\ p_2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

oder

$$(0)\quad p_1^5+p_2^5+p_3^5+p_4^5+20p_2^{\,}p_3(p_1^2p_3+p_4^2p_2)+\varphi_0(x)=0;$$

5ter Dimension; $G \equiv 0 \pmod{5}$

$$(1)\quad p_1^3p_2 + p_2^3p_4 + p_3^3p_1 + p_4^3p_3 + 3p_1p_2p_3p_4 + \frac{\varphi_1(x)}{5} = 0;$$

4ter Dimension; $G \equiv 0 \pmod{5}$

$$(2)\quad p_1^2p_3 + p_2^2p_1 + p_3^2p_4 + p_4^2p_2 = 0;$$

3ter Dimension; $G \equiv 0 \pmod{5}$

$$(3)\quad p_1p_4 + p_2p_3 = 0;$$

2ter Dimension; $G \equiv 0 \pmod{5}$.

[Bemerkenswerth ist, dass in der Darstellung der Lösung der trinomischen Gleichung 5ten Grades mit Hilfe der Modulargleichungen der elliptischen Functionen (welche Lösung zuerst von Hermite gegeben ist, indem er von den Jacobischen Relationen ausgeht und später von Kronecker, welcher direct von der Substitutionentheorie der algebraischen Gleichungen ausgeht) Brioschi schon vor einer Reihe von Jahren, also noch ehe unsere allgemeinern Gesetze der cyklosymmetrischen Determinanten und der Zusammenhang der-

selben mit den Coefficienten einer algebraischen Gleichung bekannt waren, von Gleichungen ausgeht, welche genau die Gestalt unserer letztern haben. Uebrigens sind dort $\varphi(x)$ sowohl, als auch unsere p durchaus keine Functionen von x und die Gleichungen werden dort in einem ganz andern Sinne gebraucht.]

Die Berechnung dieser Gleichungen ergiebt:

$$(3)\quad 0 = (a_1 a_4 + a_2 a_3)\, x^5 + (a_1 a_9 + a_2 a_8 + a_3 a_7 + a_4 a_6)\, x^{10} + \\ + (a_1 a_{14} + a_2 a_{13} + a_3 a_{12} + a_4 a_{11} + a_6 a_9 + a_7 a_8)\, x^{15} + \cdots$$

$$(2)\quad 0 = a_1 (a_2^2 + a_1 a_3)\, x^5 + \left.\begin{matrix} [a_1^2 a_8 + a_2^2 a_6 + a_3^2 a_4 + a_4^2 a_2 \\ + 2 a_1 (a_2 a_7 + a_3 a_6)] \end{matrix}\right| x^{10} + \\ \left.\begin{matrix} + a_1^2 a_{13} + a_2^2 a_{11} + a_3^2 a_9 + a_4^2 a_7 + a_6^2 a_3 + a_7^2 a_1 \\ + 2 [a_1 (a_2 a_{12} + a_3 a_{11}) + a_2 (a_4 a_9 + a_6 a_7) + \\ + a_8 (a_1 a_6 + a_3 a_4)] \end{matrix}\right| x^{15} + \cdots$$

$$(1)\quad 0 = (a_1^3 a_2 + \alpha_{1,5})\, x^5 + \left.\begin{matrix} a_1^3 a_7 + a_2^3 a_4 + a_3^3 a_1 + \alpha_{1,10} \\ + 3 a_1 a_2 (a_1 a_6 + a_3 a_4) \end{matrix}\right| x^{10} + \\ \left.\begin{matrix} + a_1^3 a_{12} + a_2^3 a_9 + a_3^3 a_6 + a_4^3 a_3 + \alpha_{1,15} \\ + 3 [a_1^2 (a_2 a_{11} + a_6 a_7) + a_2^2 a_4 a_7 + \\ + a_3^2 a_1 a_8 + a_6^2 a_1 a_2] \\ + 3 [a_1 a_2 a_3 a_9 + a_1 a_2 a_8 a_4 + a_1 a_7 a_3 a_4 + \\ + a_6 a_2 a_3 a_4] \end{matrix}\right| x^{15} + \cdots$$

$$(0)\quad 0 = (a_1^5 + \alpha_{0,5})\, x^5 + (5 a_1^4 a_6 + a_2^5 + \\ + 20 a_1^2 a_2 a_3^2 + \alpha_{0,10})\, x^{10} + \\ \left.\begin{matrix} + a_3^5 + 5 a_2^4 a_7 + 5 a_1^4 a_{11} + 10 a_1^3 a_6^2 + \alpha_{0,15} \\ + 20 [a_1^2 a_3^2 a_7 + a_2^2 a_4^2 a_3 + \\ + 2 a_1 a_2 a_3 (a_1 a_8 + a_3 a_6)] \end{matrix}\right| x^{15} + \cdots$$

(Vgl. die letzte berechnete Gleichung mit der am Schlusse des ersten Capitels bereits berechneten; s. pag. 42.)

Aus (0) bekommt man nun für den Coefficienten von x^5 die binomische Gleichung 5ten Grades

$$a_1^5 + \alpha_{0,5} = 0,$$

dann aus (1), falls a_1 von Null verschieden ist:

$$a_2 = -\frac{\alpha_{1,5}}{a_1^3};$$

darauf aus (2)

$$a_3 = -\frac{a_2^2}{a_1} = -\frac{\alpha_{1,5}^2}{a_1^7},$$

nnd aus (3)

$$a_4 = \frac{a_2^3}{a_1^2} = -\frac{\alpha_{1,5}^3}{a_1^{11}}.$$

Somit sind die ersten vier a (der ersten Gruppe) berechnet. Dann folgt aus den Coefficienten von x^{10} das System von vier linearen Gleichungen für die Bestimmung der vier folgenden Grössen der zweiten Gruppe a_6, a_7, a_8, a_9; man hat nämlich (bei Berücksichtigung der vorhergehenden Beziehungen):

$$(3)\quad a_1 a_9 + a_2 a_8 + a_3 a_7 + a_4 a_6 = 0 \quad ; (0 = a_1 a_4 + a_2 a_3),$$

$$(2)\quad a_1^2 a_8 + 2 a_1 a_2 a_7 + a_1 a_3 a_6 = B_{2,10}; \left(-B_{2,10} = \frac{2 a_2^7}{a_1^4}\right),$$

$$(1)\quad a_1^3 a_7 + 3 a_1^2 a_2 a_6 = B_{1,10}; \left(B_{1,10} = \frac{3 a_2^6}{a_1^2} - \alpha_{1,10}\right),$$

$$(0)\quad 5 a_1^4 a_6 = B_{0,10}; \left(-B_{0,10} = 21 a_2^5 - \alpha_{0,10}\right).$$

Nehmen wir nun zunächst einen einfachern Fall für die Coefficienten der gegebenen Gleichung an:

$$\varphi_1(x) = 5\alpha_{1,5} x^5, \quad \text{also} \quad \alpha_{1,10} = \alpha_{1,15} = \cdots = \alpha_{1,q5} = 0 \text{ für } q > 1,$$

$$\varphi_0(x) = \alpha_{0,5} x^5, \quad ,, \quad \alpha_{0,10} = \alpha_{0,15} = \cdots = \alpha_{0,q5} = 0 \text{ für } q > 1,$$

so ergeben sich unmittelbar die Werthe

$$a_6 = \frac{B_{0,10}}{5 a_1^4}; \quad a_7 = \frac{\begin{vmatrix} B_{0,10}, & 5 a_1^4 \\ B_{1,10}, & 3 a_1^2 a_2 \end{vmatrix}}{5 a_1^7}; \quad a_8 = \frac{\begin{vmatrix} B_{0,10}, & 0, & 5 a_1^4 \\ B_{1,10}, & a_1^3, & 3 a_1^2 a_2 \\ B_{2,10}, & 2 a_1 a_2, & a_1 a_3 \end{vmatrix}}{5 a_1^9}$$

$$a_9 = \frac{\begin{vmatrix} B_{0,10}, & 0, & 0, & 5 a_1^4 \\ B_{1,10}, & 0, & a_1^3, & 3 a_1^2 a_2 \\ B_{2,10}, & a_1^2, & 2 a_1 a_2, & a_1 a_3 \\ 0, & a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix}}{5 a_1^{10}};$$

oder:

$$a_6 = -\frac{21}{5}\cdot\frac{a_2^5}{a_1^4};\quad a_7 = \frac{78}{5}\cdot\frac{a_2^6}{a_1^5};\quad a_8 = -\frac{187}{5}\cdot\frac{a_2^7}{a_1^6};$$

$$a_9 = \frac{286}{5}\cdot\frac{a_2^8}{a_1^7}.$$

Wollte man noch den Coefficienten von x^{15} in den vier Bedingungsgleichungen ebenso behandeln, so würde man die Werthe der vier Grössen

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}$$

der dritten Gruppe

$$a_{11} = -\frac{9367}{25}\frac{a_2^{10}}{a_1^9};\quad a_{12} = \frac{39767}{25}\frac{a_2^{11}}{a_1^{10}};\quad a_{13} = -\frac{105672}{25}\frac{a_2^{12}}{a_1^{11}};$$

$$a_{14} = \frac{175398}{25}\frac{a_2^{13}}{a_1^{12}}$$

erhalten; aber schon in der vorigen Gruppe konnte man zur Genüge das allgemeine Bildungsgesetz des Zahlencoefficienten

$$N_p = \frac{\prod_{0}^{p-2}{}_\lambda\,(p-5\lambda)}{p!},$$

den wir oben in Cap. II allgemein und in diesem Capitel für andere specielle Fälle schon oft behandelt haben, leicht verificiren.

Die Convergenzbedingung ist oben Cap. II, A, g) für den allgemeinen Fall ($m = m$) bereits angegeben, so dass für $m = 5$ sich die Bedingung

$$\text{Mod. } 4^4\,\frac{a_2^5 x^5}{a_1^5} < 1$$

ergiebt, und innerhalb dieses Gebietes der x-Ebene liefert unsere Reihe

$$f(x) = 0 - \alpha_{0,5}^{\frac{1}{5}}\,x + \frac{\alpha_{1,5}}{\alpha_{0,5}^{\frac{3}{5}}}\,x^2 - \frac{\alpha_{1,5}^2}{\alpha_{0,5}^{\frac{7}{5}}}\,x^3 + \frac{\alpha_{1,5}^3}{\alpha_{0,5}^{\frac{11}{5}}}\,x^4 +$$

$$+ 0\cdot x^5 - \frac{21}{5}\,\frac{\alpha_{1,5}^5}{\alpha_{0,5}^{\frac{19}{5}}}\,x^6 + \cdots + N_p\,\frac{\alpha_{1,5}^{p-1}}{\alpha_{0,5}^{\frac{4p-5}{5}}}\,x^p + \cdots$$

für jeden Werth von x die fünf Wurzeln der Gleichung

$$z^5 + 5\alpha_{1,5}x^5 \cdot z + \alpha_{0,5}x^5 = 0,$$

wenn man in der Reihe anstatt x

$$r_n^h x; \quad (h = 0, 1, 2, 3, 4)$$

setzt, (wodurch die Gleichung offenbar unverändert bleibt, da in derselben nur x^5 vorkommt).

Hat man die trinomische Gleichung fünften Grades mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_1 z + A_0 = 0$$

und will man die Wurzeln derselben durch die circumplexen Functionen unserer Reihe darstellen, so braucht man nur die Coefficienten dieser speciellen Gleichung mit denen der obigen zu identificiren. Man erhält zu diesem Zwecke

$$A_1 = 5\alpha_{1,5}x^5,$$
$$A_0 = \alpha_{0,5}x^5;$$

und wenn man diese Werthe in das allgemeine Glied unserer Reihe einträgt, so wird das allgemeine Glied von x unabhängig

$$N_p \frac{\alpha_{1,5}^{p-1} x^p}{\alpha_{0,5}^{\frac{4p-5}{5}}} = N_p \frac{\left(\frac{A_1}{5}\right)^{p-1}}{A_0^{\frac{4p-5}{5}}}$$

und diese Reihe ist jetzt convergent für den bekannten Discriminantenwerth

$$\text{Mod.} \frac{\left(\frac{A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} < 1,$$

den man erhält, wenn man in dem obigen Quotienten einmal $p = p'$ und einmal $p = p' - 5$ setzt und beide Resultate durch einander dividirt.

B. *Allgemeine cyklische Gleichung; $l = l$.*

Wir haben oben für die Coefficienten $\varphi(x)$ der gegebenen Gleichung die Beschränkung erhalten, dass ihre sämmtlichen Exponenten durch 5 theilbar sein mussten, wenn wir verlangt

haben, dass die circumplexen Functionen einer Potenzreihe mit ganzzahligen Exponenten *direct* die Wurzeln liefern sollen. Diese Beschränkung modificirt sich aber, wenn wir unser Verlangen dahin abändern, *dass die mit* $r_n^{-l.h}$ *multiplicirten* h^{ten} *circumplexen Functionen* $f(r_n^h x)$

$$(h = 0, 1, 2, 3, 4)$$

einer Potenzreihe mit ganzzahligen Exponenten $f(x)$ die Wurzeln liefern sollen.

Es sei eine andere trinomische Gleichung 5ten Grades

$$F_l(z, x) = z^5 + \varphi_{l,1}(x) z + \varphi_{l,0}(x) = 0$$

gegeben und es sollen jetzt

$$r_5^{-l.0} f(x); \quad r_5^{-l.1} f(r_5 x); \quad r_5^{-l.2} f(r_5^2 x);$$
$$r_5^{-l.3} f(r_5^3 x); \quad r_5^{-l.4} f(r_5^4 x)$$

einer Potenzreihe

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_q x^q + \cdots$$

für jeden Werth von x in der Umgebung von $x = 0$ die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$F_l(z, x) = 0,$$

die wir l^{te} cyklische Gleichung nennen, repräsentiren. Dabei sollen $\varphi_{l,1}(x)$ und $\varphi_{l,2}(x)$ gewisse in einem gemeinsamen Gebiete convergente Potenzreihen sein.

Unsre fundamentalen Bedingungsgleichungen haben jetzt die Gestalt:

$$(0) \qquad \begin{vmatrix} 0 & p_{l+4} & p_{l+3} & p_{l+2} & p_{l+1} \\ p_{l+1} & 0 & p_{l+4} & p_{l+3} & p_{l+2} \\ p_{l+2} & p_{l+1} & 0 & p_{l+4} & p_{l+3} \\ p_{l+3} & p_{l+2} & p_{l+1} & 0 & p_{l+4} \\ p_{l+4} & p_{l+3} & p_{l+2} & p_{l+1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \varphi_{l,0}(x),$$

$$(1) \qquad 5 \begin{vmatrix} 0 & p_{l+4} & p_{l+3} & p_{l+2} \\ p_{l+1} & 0 & p_{l+4} & p_{l+3} \\ p_{l+2} & p_{l+1} & 0 & p_{l+4} \\ p_{l+3} & p_{l+2} & p_{l+1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \varphi_{l,1}(x),$$

$$(2)\qquad 5\begin{vmatrix} 0 & p_{l+4} & p_{l+3} \\ p_{l+1} & 0 & p_{l+4} \\ p_{l+2} & p_{l+1} & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & p_{l+3} & p_{l+1} \\ p_{l+2} & 0 & p_{l+3} \\ p_{l+4} & p_{l+2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3)\qquad 5\begin{vmatrix} 0 & p_{l+4} \\ p_{l+1} & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & p_{l+3} \\ p_{l+2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4)\qquad 5\,p_l = 0.$$

Oder ausgerechnet:

$$(0)\quad 0 = p_{l+1}^5 + p_{l+2}^5 + p_{l+3}^5 + p_{l+4}^5 + 20 p_{l+2} p_{l+3} (p_{l+1}^2 p_{l+3} + $$
$$+ p_{l+4}^2 p_{l+2}) + \varphi_{l,0}(x),$$

$$(1)\quad 0 = p_{l+1}^3 p_{l+2} + p_{l+2}^3 p_{l+4} + p_{l+3}^3 p_{l+1} + p_{l+4}^3 p_{l+3} +$$
$$+ 3 p_{l+1} p_{l+2} p_{l+3} p_{l+4} - \varphi_{l,1}(x),$$

$$(2)\quad 0 = p_{l+1}^2 p_{l+3} + p_{l+2}^2 p_{l+1} + p_{l+3}^2 p_{l+4} + p_{l+4}^2 p_{l+2},$$

$$(3)\quad 0 = p_{l+1} p_{l+4} + p_{l+2} p_{l+3},$$

$$(4)\quad 0 = p_l,$$

und man sieht sofort, dass diesmal die Dimensionen der Bedingungsgleichungen respective dieselben blieben, dagegen änderte sich das Gewicht derselben; anstatt nämlich, dass im oberen Falle bei allen Gleichungen

$$G \equiv 0 \pmod{5}$$

war, haben wir hier:

in	(0)	Dim. = 5;	$G \equiv 0 \pmod{5}$,
„	(1)	Dim. = 4;	$G \equiv 4l \pmod{5}$,
„	(2)	Dim. = 3;	$G \equiv 3l \pmod{5}$,
„	(3)	Dim. = 2;	$G \equiv 2l \pmod{5}$,
„	(4)	Dim. = 1;	$G \equiv 1l \pmod{5}$,

(so dass der obige Fall in diesem als specieller für $l = 0$ enthalten ist).

Dieses Gesetz bleibt offenbar bestehen, auch wenn man es nicht mit der trinomischen, sondern mit der allgemeinen Gleichung, wo keine der $\varphi(x)$ identisch Null ist, zu thun hat. Selbstverständlich ist es auch, dass dasselbe nicht bloss für $n = 5$, sondern für ein allgemeines n stattfindet.

Ist aber eine Gleichung gegeben, in welcher die Coefficienten gewisse Potenzreihen $\psi(x)$ sind, deren Exponenten den obigen Gesetzen für keinen der Werthe $l = 0, 1, 2, 3, 4$ gehorchen, so *ist es im Allgemeinen* **nicht möglich** *sämmtliche Wurzeln durch die mit r_5^{-lh} multiplicirten circumplexen Functionen 5ter Classe $f(r_5^h x)$ darzustellen, wenn $f(x)$ eine Potenzreihe mit ganzen Exponenten sein soll.* — Dagegen bleiben für diesen Fall noch folgende Möglichkeiten: 1) Entweder erreicht man das Verlangte mittelst einer Substitution $x^\mu = y$ durch Cofunctionen einer Potenzreihe mit gebrochenen Exponenten. 2) Oder man ändert das Verlangen dahin, dass anstatt *einer* Hauptfunction *mehrere* treten; so dass n_1 *circumplexe Functionen einer Hauptfunction* $f_1(x)$ n_1 *Wurzeln und zugleich* n_2 *circumplexe Functionen* n_2^{ter} *Classe von* $f_2(x)$ n_2 *Wurzeln* etc., bis etwa n_λ *circumplexe Functionen* n_λ^{ter} *Classe von* $f_\lambda(x)$ n_λ *Wurzeln für jeden Werth von x liefern, wobei*

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda = n$$

ist. 3) *Oder endlich, man lässt beide Modificationen zugleich gelten.* Im Folgenden werden einige Beispiele behandelt werden.

C. *Erste cyklische Gleichung;* $l = 1$.

Es sei jetzt speciell die Gleichung

$$z^5 + 5\alpha_{1,4}x^4 z + \alpha_{0,0} = 0$$

gegeben, wobei also $\varphi_0(x)$ eine *nullte* Partialfunction [eigentlich eine Constante; man kann sie als nullte Partialfunction 5ter (eigentlich einer beliebigen) Classe betrachten, in welcher alle weiteren Coefficienten identisch Null sind, da die fundamentalen Gesetze der Cofunctionen über die weiteren Coefficienten nichts Näheres bestimmen] und $\varphi_1(x)$ eine 4te Partialfunction 5ter Classe (eigentlich einer beliebigen Classe), deren *weitere* Coefficienten identisch Null sind; während in den übrigen $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ *alle* Coefficienten identisch verschwinden.

Aus dem obigen allgemeinen Schema in B. ergiebt sich sofort, dass man es hier mit der *ersten* ($l = 1$) cyklischen Gleichung zu thun hat, deren 5 Wurzeln durch

$$f(x); \quad r_5^{-1} f(r_5 x); \quad r_5^{-2} f(r_5^2 x); \quad r_5^{-3} f(r_5^3 x); \quad r_5^{-4} f(r_5^4 x)$$

einer Potenzreihe $f(x)$ mit ganzen Exponenten in der Umgebung von $x = 0$ repräsentirt werden.

Die Bedingungsgleichungen sind diesmal

$$\begin{aligned}
&(0) \quad 0 = p_0^5 + p_2^5 + p_3^5 + p_4^5 + 20 p_3 p_4 (p_2^2 p_4 + p_0^2 p_3) + \alpha_{0,0}, \\
&(1) \quad 0 = p_2^3 p_3 + p_3^3 p_0 + p_4^3 p_2 + p_0^3 p_4 + 3 p_2 p_3 p_4 p_0 - \alpha_{1,4} x^4, \\
&(2) \quad 0 = p_2^2 p_4 + p_3^2 p_2 + p_4^2 p_0 + p_0^2 p_3, \\
&(3) \quad 0 = p_2 p_0 + p_3 p_4, \\
&(4) \quad 0 = p_1.
\end{aligned}$$

Ein Blick auf die Construction der Gleichungen zeigt zunächst, 1) dass in (3), in welcher $G \equiv 2 \pmod{5}$ ist, nur ein einziges Glied vom kleinsten Gewichte 2 vorhanden ist und zwar das Glied $p_2 p_0$, so dass die Reihe anfangen würde

$$0 = a_2 a_0 x^2 + \cdots,$$

woraus sofort folgt $a_2 a_0 = 0$. Ganz ebenso folgt aus (2), in welcher $G \equiv 3 \pmod{5}$ ist, dass zum ersten Coefficienten von x^3 das einzige Glied $p_0^2 p_3$ beitragen kann, und aus

$$0 = a_0^2 a_3 x^3 + \cdots$$

folgt wiederum $a_0^2 a_3 = 0$. Dagegen würde die Reihe (1) lauten

$$0 = (a_0^3 a_4 - \alpha_{1,4})\, x^4 + \cdots.$$

Der Gleichung (0) sieht man es sofort an, dass sie *kein einziges* Glied vom Gewichte 5 besitzt, so dass sie lautet:

$$0 = (a_0^5 + \alpha_{0,0}) + A_{10} x^{10} + \cdots,$$

da nun $\alpha_{0,0}$ von Null verschieden vorausgesetzt wird, so ist

$$a_0 \gtrless 0$$

und es muss daher ausser $a_1 = 0$, (übrigens $a_{\varrho 5+1} = 0$, wie aus (4) folgt) auch

$$a_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 = 0$$

sein.

Würde man, ohne jede Ueberlegung, die gesuchte Reihe vorläufig in der Gestalt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ansetzen und die obigen Gleichungen ohne Weiteres berechnen, so würde die einfache, aber ziemlich mühselige Rechnung zeigen, dass nicht bloss aus den Grössen der ersten Gruppe, ausser a_0 *nur* noch a_4 von Null verschieden ist, sondern, dass auch in der zweiten Gruppe ganz analog

$$a_5 = 0, \ a_6 = 0, \ a_7 = 0; \quad a_8 \gtrless 0$$

sind; so dass die Rechnung diesmal eine unnatürliche Complication enthalten würde, die sich erst hinterher als überflüssig herausstellen könnte, indem in allen diesen zu berechnenden Potenzreihen alle Glieder, in welchen obige Grössen enthalten sind, verschwinden und die Reihen ganz bedeutend einfacher werden.

Durch eine einfache Ueberlegung können wir uns aber diese Mühe systematisch ersparen. — Da nämlich das absolute Glied in diesem speciellen Falle von x überhaupt unabhängig ist, so würde dasselbe eine nullte Partialfunction 5ter Classe einer Function von y bleiben, wenn wir $x^4 = y$ setzten. Die Gleichung

$$z^5 + 5\alpha_{1,4} y z + \alpha_{0,0} = 0$$

würde aber nach dem Obigen als eine 4te cyklische Gleichung ($l = 4$) aufzufassen sein, so dass die fünf Wurzeln derselben durch

$$f_1(y); \ r_5^{-4} f_1(r_5 y); \ r_5^{-4.2} f_1(r_5^2 y); \ r_5^{-4.3} f_1(r_5^3 y); \ r_5^{-4.4} f_1(r_5^4 y)$$

einer Potenzreihe nach ganzen Potenzen von y

$$f_1(y) = a_0' + a_1' y + a_2' y^2 + a_3' y^3 + \cdots$$

in der Umgebung von $y = 0$ dargestellt werden könnten. Setzt man also wiederum $y = x^4$; $a_q' = a_{4q}$ und bedenkt, dass a_0, oder a_0' *jedenfalls nur* in der 5ten Potenz in der Bedingungsgleichung (0) zum ersten Male (in dem Gliede, welches zur definitiven Bestimmung von a_0 wesentlich beiträgt) auftritt, so dass die Substitution von $r_5^h a_0$ anstatt a_0 keinerlei Einfluss haben kann*), so können wir in unserem Falle die

*) Aus diesem Grunde hindert der Umstand nicht, dass oben $r_5^{-h} f(r_5^h x)$ die Wurzeln darstellen, während wir hier die Repräsentation durch $r_5^{-4.h} f(r_5^h y)$ besorgen wollen. — Es ist dieser Umstand übrigens der *erste*, der uns eine Gelegenheit bietet, die Zweckmässigkeit der sonst

gesuchte Potenzreihe von vornherein als *nullte Partialfunction* 4ter Classe voraussetzen, so dass dieselbe lautet:

$$f(x) = a_0 + a_4 x^4 + a_8 x^8 + a_{12} x^{12} + a_{16} x^{16} + a_{20} x^{20} + \cdots,$$

so dass unsere vier Partialfunctionen fünfter Classe, welche uns interessiren (es ist ja $p_1 = 0$), als subordinirte Partialfunctionen, eigentlich als solche 20ter Classe auftreten:

$$\begin{aligned}
p_0 &= p_{5,0} = a_0 + a_{20} x^{20} + a_{40} x^{40} + \cdots, \\
p_2 &= p_{5,2} = a_{12} x^{12} + a_{32} x^{32} + a_{52} x^{52} + \cdots, \\
p_3 &= p_{5,3} = a_8 x^8 + a_{28} x^{28} + a_{48} x^{48} + \cdots, \\
p_4 &= p_{5,4} = a_4 x^4 + a_{24} x^{24} + a_{44} x^{44} + \cdots.
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt diese Werthe in die obigen Bedingungsgleichungen ein, so erhält man dieselben in solcher Gestalt, dass aus jedem Coefficienten derselben wirklich *alle* Coefficienten der gesuchten Reihe bestimmt werden, welche zu der entsprechenden Gruppe gehören. Man hat nämlich (wenn man die Gleichung (1) durch x^4, die Gleichung (2) durch x^8 und die Gleichung (3) durch x^{12} dividirt, was offenbar erlaubt ist, da die Gleichungen auch für $x \lesssim 0$ befriedigt werden sollen)

$$(0) \quad 0 = (a_0^5 + \alpha_{0,0}) + (a_4^5 + 5 a_0^4 a_{20} + 20 a_0^2 a_4 a_8^2) x^{20} + \\
+ \left\{ \begin{array}{l} 5 a_0^4 a_{40} + 10 a_0^3 a_{20}^2 + a_8^5 + 5 a_4^4 a_{24} + \\ + 20 [a_4^2 a_8 a_{12}^2 + a_0^2 a_8^2 a_{24} + \\ \qquad + 2 a_0 a_8 (a_0 a_4 a_{28} + a_4 a_8 a_{20})] \end{array} \right\} x^{40} + \cdots$$

---

scheinbar überflüssigen n-Deutigkeit unserer Lösung darzulegen, welche darin besteht, dass zur Bestimmung *eines* der Coefficienten immer *eine binomische* Gleichung n^{ten} Grades auftritt. Wir werden später noch Gelegenheit finden, von dieser Bemerkung nützliche Folgerungen zu ziehen. — Ueberhaupt werden oft solche einfache Ueberlegungen die in der ganzen obigen Theorie nöthige complicirte Rechnung, wie wir später sehen werden, sehr vereinfachen. Hier kommt es uns aber mehr darauf an zu zeigen, dass unsere rein formalen Rechnungen ohne jede Speculation zu denselben Resultaten führen, wenn auch manchmal nicht auf dem kürzesten Wege. — Die Complication macht aber dann in der Regel selbst auf die nöthige Vervollständigung der Methoden aufmerksam.

$$(1)\quad 0 = (a_0^3 a_4 - \alpha_{1,4}) + \left\{\begin{array}{l} a_0^3 a_{24} + a_8^3 a_0 + a_4^3 a_{12} + \\ + 3(a_0^2 a_{20} a_4 + a_0 a_4 a_8 a_{12}) \end{array}\right\} x^{20} +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} a_0^3 a_{44} + a_4^3 a_{32} + a_8^3 a_{20} + a_{12}^3 a_8 + \\ + 3(a_0^2 a_{20} a_{24} + a_0^2 a_{40} a_4 + a_8^2 a_{28} a_0 + \\ \qquad + a_4^2 a_{24} a_{12}) + 6 a_0 a_{20}^2 a_4 \end{array}\right\} x^{40} + \cdots$$

$$(2)\quad 0 = a_0(a_4^2 + a_0 a_8) + \left\{\begin{array}{l} a_0^2 a_{28} + a_4^2 a_{20} + a_8^2 a_{12} + a_{12}^2 a_4 + \\ \qquad + 2 a_0 a_4 a_{24} + 2 a_0 a_8 a_{20} \end{array}\right\} x^{20} +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} a_0^2 a_{48} + a_4^2 a_{40} + a_8^2 a_{32} + a_{12}^2 a_{24} + \\ \qquad + a_{20}^2 a_8 + a_{24}^2 a_0 + \\ + 2[a_0(a_4 a_{44} + a_8 a_{40} + a_{20} a_{28}) + \\ \qquad + a_4(a_{12} a_{32} + a_{20} a_{24}) + a_8 a_{12} a_{28}] \end{array}\right\} x^{40} + \cdots$$

$$(3)\quad 0 = (a_0 a_{12} + a_4 a_8) + (a_0 a_{32} + a_4 a_{28} + a_8 a_{24} + a_{12} a_{20}) x^{20} +$$
$$+ (a_0 a_{52} + a_4 a_{48} + a_8 a_{44} + a_{12} a_{40} + a_{20} a_{32} + a_{24} a_{28}) x^{40} + \cdots$$

Durch das identische Verschwinden der Coefficienten von x^0 erhält man aus

$$(0)\quad a_0^5 + \alpha_{0,0} = 0; \qquad (1)\quad a_4 = \frac{\alpha_{1,4}}{a_0^3};$$

$$(2)\quad a_8 = -\frac{\alpha_{1,4}^2}{a_0^7}; \qquad (3)\quad a_{12} = \frac{\alpha_{1,4}^3}{a_0^{11}}.$$

Dann liefern die Coefficienten von x^{20} aus

$$(0)\quad a_{20} = -\frac{21}{5} \cdot \frac{\alpha_{1,4}^5}{a_0^{19}}; \qquad (1)\quad a_{24} = \frac{78}{5} \cdot \frac{\alpha_{1,4}^6}{a_0^{23}};$$

$$(2)\quad a_{28} = -\frac{187}{5} \cdot \frac{\alpha_{1,4}^7}{a_0^{27}}; \qquad (3)\quad a_{32} = \frac{286}{5} \cdot \frac{\alpha_{1,4}^8}{a_0^{31}}$$

etc.

Man erkennt sofort das obige Bildungsgesetz für $q > 1$:

$$a_{4q} = -\frac{\prod_{\lambda=0}^{q-1}(q + 1 - 5\lambda)}{(q+1)!} \cdot \frac{\alpha_{1,4}^q}{a_0^{4q-1}}.$$

Die Convergenzbedingung ist wiederum analog wie oben

$$\text{Mod. } 4^4 \left(\frac{a_4 x^4}{a_0}\right)^5 < 1,$$

so dass, wenn man die Lösung einer Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_1 z + A_0 = 0$$

durch die obige Lösung ausdrücken will, dieses wiederum nur möglich ist, wenn

$$\text{Mod. } \frac{\left(-\frac{A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} < 1$$

ist.

D. *Zweite cyklische Gleichung.*

$l = 2.$

Hat man ferner die Gleichung

$$z^5 + 5\alpha_{1,3} x^3 z + \alpha_{00} = 0,$$

so wissen wir, dass die Wurzeln durch die mit $r_n^{-2.h}$ multiplicirten circumplexen Functionen 5ter Classe aus der 0ten Partialfunction 3ter Classe

$$f(x) = a_0 + a_3 x^3 + a_6 x^6 + a_9 x^9 + a_{12} x^{12} + \cdots$$

dargestellt werden. Berechnet man, analog wie oben, aus

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0 + a_{15} x^{15} + a_{30} x^{30} + \cdots \\
p_1 &= a_6 x^6 + a_{21} x^{21} + a_{36} x^{36} + \cdots \\
p_3 &= a_3 x^3 + a_{18} x^{18} + a_{33} x^{33} + \cdots \\
p_4 &= a_9 x^9 + a_{24} x^{24} + a_{39} x^{39} + \cdots
\end{aligned}$$

die Bedingungsgleichungen

$$(0) \quad 0 = p_0^5 + p_1^5 + p_3^5 + p_4^5 + 20 p_0 p_4 (p_3^2 p_0 + p_1^2 p_4) + \alpha_{0,0};$$
$$\text{Dim.} = 5; \quad G \equiv 0 \text{ (mod. 5)},$$

$$(1) \quad 0 = p_0^3 p_3 + p_1^3 p_0 + p_3^3 p_4 + p_4^3 p_1 + 3 p_0 p_1 p_3 p_4 - \alpha_{1,3} x^3;$$
$$\text{Dim.} = 4; \quad G \equiv 3 \text{ (mod. 5)},$$

$$(2) \quad 0 = p_0^2 p_1 + p_1^2 p_4 + p_3^2 p_0 + p_4^2 p_3 \qquad ;$$
$$\text{Dim.} = 3; \quad G \equiv 1 \text{ (mod. 5)},$$

$$(3) \quad 0 = p_0 p_4 + p_1 p_3 \qquad ;$$
$$\text{Dim.} = 2; \quad G \equiv 4 \text{ (mod. 5)},$$

$$(4) \quad 0 = p_2 \qquad ;$$
$$\text{Dim.} = 1; \quad G \equiv 2 \text{ (mod. 5)},$$

so erhält man nach Division der Gleichungen durch gewisse Potenzen von x^3 aus den Coeffficienten von x^0

in (0) $a_0 = -\alpha_{0,0}^{\frac{1}{5}}$; (1) $a_3 = \frac{\alpha_{1,3}}{a_0^3}$;

(2) $a_6 = -\frac{\alpha_{1,3}^2}{a_0^7}$; (3) $a_9 = \frac{\alpha_{1,3}^3}{a_0^{11}}$;

dann aus den Coefficienten von x^{15}

in (0) $a_{12} = -\frac{21}{5}\frac{\alpha_{1,3}^4}{a_0^{15}}$; (1) $a_{18} = \frac{78}{5}\frac{\alpha_{1,3}^6}{a_0^{23}}$;

(2) $a_{21} = -\frac{187}{5}\frac{\alpha_{1,3}^7}{a_0^{27}}$; (3) $a_{24} = \frac{286}{5}\frac{\alpha_{1,3}^8}{a_0^{31}}$;

etc. Das allgemeine Bildungsgesetz für $q > 1$ wiederum:

$$a_{3q} = \frac{\prod_{\lambda=0}^{q-1}(q+1-\lambda\cdot 5)}{(q+1)!}\frac{\alpha_{1,3}^q}{a_0^{4q-1}};$$

Convergenzbedingung:

$$\text{Mod. } 4^4\left(\frac{a_3 x^3}{a_0}\right)^5 < 1;$$

für constante Coefficienten $5\alpha_{1,3}x^3 = A_1$; $\alpha_{0,0} = A_0$ nur giltig, wenn

$$\text{Mod. } \frac{\left(\frac{-A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} < 1.$$

E. *Dritte cyklische Gleichung.*

$l = 3.$

Für die Gleichung

$$z^5 + 5\alpha_{1,2}x^2 z + \alpha_{0,0} = 0$$

liefern, ganz analog wie oben, die mit $r_5^{-3.h}$ multiplicirten $f(r_5^h x)$ aus

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots$$

die Wurzeln der Gleichung, wobei aus den Bedingungsgleichungen

$$(0)\quad 0=p_0^5+p_1^5+p_2^5+p_4^5+20p_0p_1(p_4^2p_1+p_2^2p_0)+\alpha_{0,0};$$
$$\text{Dim.}=5;\quad G\equiv 0\ (\text{mod. } 5),$$

$$(1)\quad 0=p_0^3p_2+p_1^3p_4+p_2^3p_1+p_4^3p_0+3p_0p_1p_2p_4-\alpha_{1,2}x^2;$$
$$\text{Dim.}=4;\quad G\equiv 2\ (\text{mod. } 5),$$

$$(2)\quad 0=p_0^2p_4+p_1^2p_2+p_2^2p_0+p_4^2p_1\qquad;$$
$$\text{Dim.}=3;\quad G\equiv 4\ (\text{mod. } 5),$$

$$(3)\quad 0=p_0p_1+p_2p_4\qquad;$$
$$\text{Dim.}=2;\quad G\equiv 1\ (\text{mod. } 5),$$

$$(4)\quad 0=p_3\qquad;$$
$$\text{Dim.}=1;\quad G\equiv 3\ (\text{mod. } 5),$$

die a Gruppenweise durch das identische Verschwinden der Coefficienten von x^0, x^{10}, x^{20}, etc. resp. bestimmt werden:

$$a_0=-\alpha_{0,0}^{\frac{1}{5}};\quad a_2=\frac{\alpha_{1,2}}{a_0^3};\quad a_4=-\frac{\alpha_{1,2}^2}{a_0^7};\quad a_6=\frac{\alpha_{1,2}^3}{a_0^{11}};\ \text{etc.}$$

$$a_{2q}=\frac{\prod\limits_{\lambda=0}^{q-1}(q+1-\lambda\cdot 5)}{(q+1)!}\cdot\frac{\alpha_{1,2}^q}{a_0^{4q-1}}\ \text{für } q>1.$$

Dieselbe Convergenzbedingung wie oben, so dass für constante Coefficienten die Lösung wiederum nur giltig ist für

$$\text{Mod.}\ \frac{\left(\frac{A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4}<1.$$

F. $l=4$.

Für die Gleichung

$$z^5+5\alpha_{1,1}xz+\alpha_{0,0}=0$$

liefern

$$f(x);\quad r_5^{-4}f(r_5x);\quad r_5^{-3}f(r_5^2x);\quad r_5^{-2}f(r_5^3x);\quad r_5^{-1}f(r_5^4x)$$

aus der vollständigen Hauptfunction

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+0\cdot x^4+a_5x^5+\cdots$$

die Wurzeln der Gleichung. Die a werden gruppenweise aus den Coefficienten von x^0, x^1, x^2, etc. der ausgerechneten Gleichungen

$$(0)\quad 0 = p_0^5 + p_1^5 + p_2^5 + p_3^5 + 20 p_1 p_2 (p_0^2 p_2 + p_3^2 p_1) + \alpha_{0,0};$$
Dim. = 5; $G \equiv 0$ (mod. 5),

$$(1)\quad 0 = p_0^3 p_1 + p_1^3 p_3 + p_2^3 p_0 + p_3^3 p_2 + 3 p_0 p_1 p_2 p_3 - \alpha_{1,1} x;$$
Dim. = 4; $G \equiv 1$ (mod. 5),

$$(2)\quad 0 = p_0^2 p_2 + p_1^2 p_0 + p_2^2 p_3 + p_3^2 p_1;$$
Dim. = 3; $G \equiv 2$ (mod. 5),

$$(3)\quad 0 = p_0 p_3 + p_1 p_2;$$
Dim. = 2; $G \equiv 3$ (mod. 5),

$$(4)\quad 0 = p_4;$$
Dim. = 1; $G \equiv 4$ (mod. 5),

welche dann lauten

$$(0)\ 0 = (a_0^5 + \alpha_{0,0}) + (a_1^5 + 5 a_0^4 a_5 + 20 a_0^2 a_1 a_2^2) x^5 + \left\{\begin{matrix} + a_2^5 + 5 a_1^4 a_6 + 5 a_0^4 a_{10} + 10 a_0^3 a_5^2 + \\ + 20 [a_0^2 a_2^2 a_6 + a_1^2 a_3^2 a_2 + 2 a_0 a_1 a_2 (a_0 a_7 + a_2 a_5)] \end{matrix}\right\} x^{10} + \cdots$$

$$(1)\ 0 = (a_0^3 a_1 - \alpha_{1,1}) + (a_0^3 a_6 + a_1^3 a_3 + a_2^3 a_0 + 3 a_0 a_1 (a_0 a_5 + a_2 a_3)) x^5 + \left\{\begin{matrix} + a_0^3 a_{11} + a_1^3 a_8 + a_2^3 a_5 + a_3^3 a_2 + \\ + 3 (a_0^2 a_1 a_{10} + a_0^2 a_5 a_6 + a_1^2 a_3 a_6 + a_2^2 a_0 a_7 + \\ + a_5^2 a_0 a_1) + \\ + 3 [a_0 a_1 (\alpha_2 a_8 + a_3 a_7) + a_2 a_3 (a_0 a_6 + a_1 a_5)] \end{matrix}\right\} x^{10} + \cdots$$

$$(2)\ 0 = a_0 (a_1^2 + a_0 a_2) + \left| \begin{matrix} a_0^2 a_7 + a_1^2 a_5 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1 \\ + 2 (a_0 a_2 a_5 + a_0 a_1 a_6) \end{matrix} \right| x^5 + \left\{\begin{matrix} + a_0^2 a_{12} + a_1^2 a_{10} + a_2^2 a_8 + a_3^2 a_6 + a_5^2 a_2 + \\ + a_6^2 a_0 + 2 [a_0 (a_2 a_{10} + a_5 a_7) + a_1 (a_0 a_{11} + a_5 a_6) + \\ + a_3 (a_1 a_8 + a_2 \alpha_7)] \end{matrix}\right\} x^{10} + \cdots$$

$$(3)\ 0 = (a_0 a_3 + a_1 a_2) + (a_0 a_8 + a_1 a_7 + a_2 a_6 + a_3 a_5) x^5 + (a_0 a_{13} + a_1 a_{12} + a_2 a_{11} + a_3 a_{10} + a_5 a_8 + a_6 a_7) x^{10} + \cdots$$

$$(4)\ 0 = a_4 + a_9 x^5 + a_{14} x^{10} + \cdots$$

bestimmt werden:

$$a_0 = -\alpha_{0,0}^{\frac{1}{5}}; \quad a_1 = \frac{\alpha_{1,1}}{a_0^3}; \quad \text{etc.}$$

$$a_q = \frac{\prod_{0}^{q-1}\lambda (q+1-\lambda\cdot 5)}{(q+1)!} - \frac{\alpha_{1,1}^{q}}{a_0^{4q-1}}; \quad (q > 1).$$

Die Convergenzbedingung ist wiederum dieselbe wie oben; und somit die Lösung für constante Coefficienten nur für

$$\text{Mod.}\ \frac{\left(\frac{A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} < 1$$

giltig.

Die Entwickelung dieser speciellen Fälle wird uns in den weitern Abschnitten zu sehr einfachen aber nützlichen Bemerkungen führen.

§ 16.

Allgemeinere Gleichung 5ten Grades.

Wir haben oben in zwei Beziehungen die $\varphi(x)$ als ganz specielle Fälle angenommen, erstens, dass $\varphi_4(x)=0$; $\varphi_3(x)=0$; $\varphi_2(x)=0$, so dass eine trinomische Gleichung nur zurückblieb, in welcher nur z^5 und z auftreten, und zweitens specialisirten wir die noch übrig bleibenden Potenzreihen

$$\varphi_1(x) \quad \text{und} \quad \varphi_0(x)$$

so, dass die Anzahl der von Null verschiedenen Coefficienten in denselben auf ein Minimum sich reducirt; nämlich in jedem $\varphi(x)$ blieb nur ein einziges Glied von Null verschieden.

Mit der Frage über die Anwendung unserer oben angedeuteten Methode: in jeder dieser Functionen noch eine gewisse Anzahl von Coefficienten unbestimmt zu lassen und dann in der Reihe die Bestimmung so zu treffen, dass der Convergenzkreis erweitert werde, wollen wir uns in den weitern Abschnitten beschäftigen. Hier wollen wir dagegen vorläufig die noch unberücksichtigt gebliebenen, anders gebildeten trinomischen Gleichungen, in welchen ausser z^5 noch eine der Potenzen z^2, z^3, z^4 stehen bleibt, behandeln. —

In dem letzten dieser Fälle ist die Summe aller Wurzeln, (also p_l, wenn die Wurzeln durch $r_5^{-lh} f(r_5^h x)$ repräsentirt werden sollen) *nicht* Null und dadurch scheint sich die Rechnung mit unsern Determinanten wesentlich zu compliciren; indess

lässt sich die complicirtere Gestalt der Gleichung dadurch vereinfachen, dass man die Resultate einer jeden in die vorhergehende zweckmässig einsetzt. Die scheinbar sehr verwickelten Ausdrücke, welche man bei der wirklichen Berechnung unserer Determinanten erhält:

$$\begin{aligned}
(0)\quad D(p_0) = {} & p_0^5 + p_1^5 + p_2^5 + p_3^5 + p_4^5 \\
& - 5(p_0^3 p_1 p_4 + p_1^3 p_3 p_4 + p_2^3 p_0 p_4 + p_3^3 p_2 p_4 + p_4^3 p_0 p_3) \\
& - 5[p_0^3 p_2 p_3 + p_1^3 p_0 p_2 + p_2^3 p_1 p_3 + p_3^3 p_0 p_1 + p_4^3 p_1 p_2] \\
& + 5(p_0 p_1^2 p_4^2 + p_1 p_3^2 p_4^2 + p_2 p_0^2 p_4^2 + p_3 p_2^2 p_4^2 + p_4 p_0^2 p_3^2) \\
& + 5[p_0 p_2^2 p_3^2 + p_1 p_0^2 p_2^2 + p_2 p_1^2 p_3^2 + p_3 p_0^2 p_1^2 + p_4 p_1^2 p_2^2] \\
& - 5 p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 = -\varphi_0(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1)\quad D^{(1)}(p_0) = {} & 5[p_0^4 - p_1^3 p_2 - p_2^3 p_4 - p_3^3 p_1 - p_4^3 p_3 - 3p_0^2 p_1 p_4 \\
& \qquad - 3p_0^2 p_2 p_3] \\
& + 5[p_1^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 + 2(p_1^2 p_0 p_3 + p_2^2 p_0 p_1 + p_3^2 p_0 p_4 \\
& \qquad + p_4^2 p_0 p_2)] \\
& - 5 p_1 p_2 p_3 p_4 = \varphi_1(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\quad D^{(2)}(p_0) = {} & 5[2p_0^3 - 3p_0 p_1 p_4 - 3p_0 p_2 p_3 \\
& + p_1^2 p_3 + p_2^2 p_1 + p_3^2 p_4 + p_4^2 p_2] = -\varphi_2(x),
\end{aligned}$$

$$(3)\quad D^{(3)}(p_0) = 5[2p_0^2 - p_1 p_4 - p_2 p_3] = \varphi_3(x),$$

$$(4)\quad D^{(4)}(p_0) = 5p_0 = -\varphi_4(x),$$

ordne man nach steigenden Potenzen von p_0, in der Gleichung (0) addire und subtrahire $15 p_0 p_1 p_2 p_3 p_4$, ebenso in der zweiten (1) den Ausdruck $15 p_1 p_2 p_3 p_4$, dann wird man die Gleichungen schreiben können in der Form

$$\begin{aligned}
(0)\quad 0 = {} & p_1^5 + p_2^5 + p_3^5 + p_4^5 \\
& + 5(p_1 p_4 - p_2 p_3)(p_1 p_2^2 - p_2 p_4^2 - p_3 p_1^2 + p_3^2 p_4) + \varphi_0(x) \\
& + 5p_0[(p_1 p_4 + p_2 p_3)^2 \\
& \qquad - (p_1^3 p_2 + p_2^3 p_4 + p_3^3 p_1 + p_4^3 p_3 + 3p_1 p_2 p_3 p_4)] \\
& + 5p_0^2(p_1^2 p_3 + p_2^2 p_1 + p_3^2 p_4 + p_4^2 p_2) \\
& - 5p_0^3(p_1 p_4 + p_2 p_3) + p_0^5;
\end{aligned}$$

$$(1)\quad 0=5[(p_1^3p_2+p_2^3p_4+p_3^3p_1+p_4^3p_3+3p_1p_2p_3p_4) \\ -(p_1p_4+p_2p_3)^2]+\varphi_1(x) \\ -10p_0[p_1^2p_3+p_2^2p_1+p_3^2p_4+p_4^2p_2] \\ +15p_0^2(p_1p_4+p_2p_3)-5p_0^4;$$

$$(2)\quad 0=5[p_1^2p_3+p_2^2p_1+p_3^2p_4+p_4^2p_2]+\varphi_2(x) \\ -15p_0(p_1p_4+p_2p_3)+10p_0^3;$$

$$(3)\quad 0=5(p_1p_4+p_2p_3)+\varphi_3(x)-10p_0^2;$$

$$(4)\quad 0=\varphi_4(x)+5p_0.$$

Daraus erhält man die Gleichungen in einer Form, in welcher die linke Seite [bis auf einen geringen Unterschied in (0)] ganz ebenso wie in jenen einfachen speciellen Fällen construirt ist, und nur in der rechten Seite erscheinen etwas complicirtere ganze rationale Functionen der $\varphi(x)$:

$$(4)\quad p_0=-\frac{\varphi_4(x)}{5},$$

$$(3)\quad p_1p_4+p_2p_3=-\frac{\varphi_3(x)}{5}+2\frac{\varphi_4(x)^2}{5^2},$$

$$(2)\quad p_1^2p_3+p_2^2p_1+p_3^2p_4+p_4^2p_2 \\ =-\frac{\varphi_2(x)}{5}+3\frac{\varphi_3(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_4(x)}{5}-4\frac{\varphi_4(x)^3}{5^3},$$

$$(1)\quad p_1^3p_2+p_2^3p_4+p_3^3p_1+p_4^3p_3+3p_1p_2p_3p_1 \\ =-\frac{\varphi_1(x)}{5}+2\frac{\varphi_2(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_4(x)}{5}+\frac{\varphi_3(x)^2}{5^2}-7\frac{\varphi_3(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_4(x)^2}{5^2} \\ +7\frac{\varphi_4(x)^4}{5^4},$$

$$(0)\quad p_1^5+p_2^5+p_3^5+p_4^5 \\ -5(p_1p_4-p_2p_3)(p_1^2p_3-p_2^2p_1-p_3^2p_4+p_4^2p_2) \\ =-\varphi_0(x)+\varphi_1(x)\cdot\frac{\varphi_4(x)}{5}-\varphi_2(x)\cdot\frac{\varphi_4(x)^2}{5^2}+\varphi_3(x)\cdot\frac{\varphi_4(x)^3}{5^3} \\ -4\frac{\varphi_4(x)^5}{5^5}.$$

Wir haben hier die Fundamentalgleichungen für den Fall $l=0$ auf die einfachste Form gebracht; es leuchtet aber von selbst ein, dass man für den allgemeinern Fall $l=l$ die gewünschte Form aus der obigen erhalten kann durch Substitution von

$$p_{l+i} \text{ anstatt } p_i$$

und

$$\varphi_{l,k}(x) \quad " \quad \varphi_k(x).$$

Es ist somit allgemein:

$$(4_l) \quad p_l = -\frac{\varphi_{l,4}(x)}{5},$$

$$(3_l) \quad p_{l+1}p_{l+4} + p_{l+2}p_{l+3} = -\frac{\varphi_{l,3}(x)}{5} + 2\frac{\varphi_{l,4}(x)^2}{5^2},$$

$$(2_l) \quad p^2_{l+1}p_{l+3} + p^2_{l+2}p_{l+1} + p^2_{l+3}p_{l+4} + p^2_{l+4}p_{l+2} =$$
$$= -\frac{\varphi_{l,2}(x)}{5} + 3\frac{\varphi_{l,3}(x)}{5} \cdot \frac{\varphi_{l,4}(x)}{5} - 4\frac{\varphi_{l,4}(x)^3}{5^3},$$

$$(1_l) \quad p^3_{l+1}p_{l+2} + p^3_{l+2}p_{l+4} + p^3_{l+3}p_{l+1} + p^3_{l+4}p_{l+3} +$$
$$+ 3p_{l+1}p_{l+2}p_{l+3}p_{l+4} = -\frac{\varphi_{l,1}(x)}{5} + 2\frac{\varphi_{l,2}(x)}{5} \cdot \frac{\varphi_{l,4}(x)}{5} +$$
$$+ \frac{\varphi_{l,3}(x)^2}{5^2} - 7\frac{\varphi_{l,3}(x)}{5} \cdot \frac{\varphi_{l,4}(x)^2}{5^2} + 7\frac{\varphi_{l,4}(x)^4}{5^4},$$

$$(0_l) \quad p^5_{l+1} + p^5_{l+2} + p^5_{l+3} + p^5_{l+4} - 5(p_{l+1}p_{l+4} - p_{l+2}p_{l+3}) \times$$
$$\times (p^2_{l+1}p_{l+3} - p^2_{l+2}p_{l+1} - p^2_{l+3}p_{l+4} + p^2_{l+4}p_{l+2}) =$$
$$= -\varphi_{l,0}(x) + \varphi_{l,1}(x) \cdot \frac{\varphi_{l,4}(x)}{5} - \varphi_{l,2}(x) \cdot \frac{\varphi_{l,4}(x)^2}{5^2} +$$
$$+ \varphi_{l,3}(x) \cdot \frac{\varphi_{l,4}(x)^3}{5^3} - 4\frac{\varphi_{l,4}(x)^5}{5^5}.$$

Ein Blick auf diese Gleichungen zeigt, dass dieselben linker Hand der Reihe nach folgende Dimensionen und Gewichte, respective Minimalgewichte der Anfangsglieder ihrer ausgerechneten Gleichung besitzen

(4_l) Dim. $= 1$; $G \equiv l \pmod{5}$; Ming. $= l$,
(3_l) Dim. $= 2$; $G \equiv 2l \pmod{5}$;
(2_l) Dim. $= 3$; $G \equiv 3l \pmod{5}$;
(1_l) Dim. $= 4$; $G \equiv 4l \pmod{5}$;
(0_l) Dim. $= 5$; $G \equiv 0 \pmod{5}$;

Das Minimalgewicht des jedesmaligen Anfangsgliedes wird im Allgemeinen durch den Rest, den die Grössen $2l$, $3l$, $4l$ respective nach dem Modul 5 liefern, bestimmt.

Nehmen wir z. B. $l = 4$, so werden die Gleichungen lauten:

$$(4_4)\quad p_4 = -\frac{\varphi_{4,4}(x)}{5},$$

$$(3_4)\quad p_0p_3 + p_1p_2 = -\frac{\varphi_{4,3}(x)}{5} + 2\frac{\varphi_{4,4}(x)^2}{5^2},$$

$$(2_4)\quad p_0^2p_2 + p_1^2p_0 + p_2^2p_3 + p_3^2p_1 =$$
$$= -\frac{\varphi_{4,2}(x)}{5} + 3\frac{\varphi_{4,3}(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_{4,4}(x)}{5} - 4\frac{\varphi_{4,4}(x)^3}{5^3},$$

$$(1_4)\quad p_0^3p_1 + p_1^3p_3 + p_2^3p_0 + p_3^3p_2 + 3p_0p_1p_2p_3 =$$
$$= -\frac{\varphi_{4,1}(x)}{5} + 2\frac{\varphi_{4,2}(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_{4,4}(x)}{5} + \frac{\varphi_{4,3}(x)^2}{5^2} -$$
$$-7\frac{\varphi_{4,3}(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_{4,4}(x)^2}{5^2} + 7\frac{\varphi_{4,4}(x)^4}{5^4},$$

$$(0_4)\quad p_0^5 + p_1^5 + p_2^5 + p_3^5 -$$
$$-5(p_0p_3 - p_1p_2)(p_0^2p_2 - p_1^2p_0 - p_2^2p_3 + p_3^2p_1) =$$
$$= -\varphi_{4,0}(x) + \varphi_{4,1}(x)\cdot\frac{\varphi_{4,4}(x)}{5} - \varphi_{4,2}(x)\cdot\frac{\varphi_{4,4}(x)^2}{5^2} +$$
$$+\varphi_{4,3}(x)\cdot\frac{\varphi_{4,4}(x)^3}{5^3} - 4\frac{\varphi_{4,4}(x)^5}{5^5}.$$

Hierbei sind offenbar der Reihe nach

$$G \equiv 4 \pmod{5},$$
$$G \equiv 3 \pmod{5},$$
$$G \equiv 2 \pmod{5},$$
$$G \equiv 1 \pmod{5},$$
$$G \equiv 0 \pmod{5};$$

so dass $\frac{\varphi_{4,4}(x)}{5}$ im Allgemeinen die Gestalt haben muss:

$$\frac{\varphi_{4,4}(x)}{5} = \alpha_{4,4}x^4 + \alpha_{4,9}x^9 + \alpha_{4,14}x^{14} + \cdots,$$

und somit

$$\frac{\varphi_{4,4}(x)^2}{5^2} = \alpha_{4,4}^2x^8 + 2\alpha_{4,4}\alpha_{4,9}x^{13} + (\alpha_{4,9}^2 + 2\alpha_{4,4}\alpha_{4,14})x^{18} + \cdots.$$

Die linke Seite von (3_4) fängt mit dem kleinsten Expo-

nenten 3 an; der Coefficient von x^3 besteht aber aus einer Summe zweier Glieder $(a_0 a_3 + a_1 a_2)$, so dass für $\frac{\varphi_{4,3}(x)}{5}$ nur die Beschränkung vorhanden ist, dass es keine Exponenten besitzen darf, welche nicht congruent sind 3 (mod. 5); dagegen ist keine Vorschrift vorhanden, welche Exponenten sie etwa besitzen müsste, so dass sogar ungehindert *alle* Coefficienten identisch Null sein könnten.

Ferner fängt $\varphi_{4,4}(x)^3$ mit $\alpha_{4,4}^3 x^{12}$ an und $\varphi_{4,3}(x) \cdot \varphi_{4,4}(x)$ im Allgemeinen mit $\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}x^7$, während die linke Seite zwar mit x^2 anfängt; indess entsteht auch dadurch keine weitere Beschränkung für $\varphi_{4,2}(x)$, als dass diese Potenzreihe *keine* Exponenten besitzen darf, welche nicht congruent sind 2 (mod. 5); sie könnten aber auch *alle* Null sein, da das Glied mit x^2 linker Hand aus einer Summe besteht $a_0{}^2 a_2 + a_1{}^2 a_0$, woraus, wenn es Null sein soll, nur eine Relation zwischen a_0, a_1, a_2 entstehen würde, die durchaus in keinem Widerspruch mit derjenigen, welche sich etwa aus (3_4) ergeben könnte zwischen a_0, a_1, a_2, a_3, stehen kann.

Dann fängt $\varphi_{4,4}(x)^4$ mit $\alpha_{4,4}^4 x^{16}$ an, $\varphi_{4,3}(x) \cdot \varphi_{4,4}(x)^2$ im Allgemeinen mit $\alpha_{4,3} \cdot \alpha_{4,4}^2 x^{11}$ und $\varphi_{4,3}(x)^2$ mit $\alpha_{4,3}^2 x^6$ und dann $\varphi_{4,2}(x) \cdot \varphi_{4,4}(x)$ mit $\alpha_{4,2} \cdot \alpha_{4,4} x^6$, während die linke Seite *ein Glied* hat, welches schon mit x^1 anfängt und zwar $a_0{}^3 a_1 x^1$. Sollen nun a_1 und a_0 von Null verschieden sein, so muss für $\varphi_{4,1}(x)$ ausser der Bedingung, dass es keine Exponenten besitzen darf, welche nicht congruent sind 1 (mod. 5) noch die Vorschrift bestehen, dass *mindestens der Coefficient von x^1 von Null verschieden sein muss.*

Dann ist endlich das Anfangsglied von $\varphi_{4,4}(x)^5$, bis auf den Zahlencoefficienten, $\alpha_{4,4}^5 x^{20}$, während $\varphi_{4,3}(x) \cdot \varphi_{4,4}(x)^3$ mit $\alpha_{4,3} \cdot \alpha_{4,4}^3 x^{15}$; $\varphi_{4,2}(x) \cdot \varphi_{4,4}(x)^2$ mit $\alpha_{4,2} \cdot \alpha_{4,4}^2 x^{10}$ und $\varphi_{4,1}(x) \cdot \varphi_{4,4}(x)$ mit $\alpha_{4,1}\alpha_{4,4} x^5$ anfängt; dagegen ist in der linken Seite *ein Glied* vorhanden, welches mit $a_0{}^5 x^0$ anfängt. Soll daher a_0 von Null verschieden sein, so muss in $\varphi_{4,0}(x)$, wo kein Exponent vorkommen darf, welcher nicht durch 5 theilbar wäre, noch mindestens $\alpha_{0,0}$ von Null verschieden sein.

Nehmen wir dagegen $l = 3$ an, so nehmen die Gleichungen die Form an

$$(4_3)\quad p_3 = -\frac{\varphi_{3,4}(x)}{5},$$

$$(3_3)\quad p_4 p_2 + p_0 p_1 = -\frac{\varphi_{3,3}(x)}{5} + 2\,\frac{\varphi_{3,4}(x)^2}{5^2},$$

$$(2_3)\quad p_4^2 p_1 + p_0^2 p_4 + p_1^2 p_2 + p_2^2 p_0 =$$
$$= -\frac{\varphi_{3,2}(x)}{5} + 3\,\frac{\varphi_{3,3}(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_{3,4}(x)}{5} - 4\,\frac{\varphi_{3,4}(x)^3}{5^3},$$

$$(1_3)\quad p_4^3 p_0 + p_0^3 p_2 + p_1^3 p_4 + p_2^3 p_1 + 3 p_4 p_0 p_1 p_2 =$$
$$= -\frac{\varphi_{3,1}(x)}{5} + 2\,\frac{\varphi_{3,2}(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_{3,4}(x)}{5} + \frac{\varphi_{3,3}(x)^2}{5^2} -$$
$$- 7\,\frac{\varphi_{3,3}(x)}{5}\cdot\frac{\varphi_{3,4}(x)^2}{5^2} + 7\,\frac{\varphi_{3,4}(x)^4}{5^4},$$

$$(0_3)\quad p_4^5 + p_0^5 + p_1^5 + p_2^5 -$$
$$- 5(p_4 p_2 - p_0 p_1)(p_4^2 p_1 - p_0^2 p_4 - p_1^2 p_2 + p_2^2 p_0) =$$
$$= -\varphi_{3,0}(x) + \varphi_{3,1}(x)\cdot\frac{\varphi_{3,4}(x)}{5} - \varphi_{3,2}(x)\cdot\frac{\varphi_{3,4}(x)^2}{5^2} +$$
$$+ \varphi_{3,3}(x)\cdot\frac{\varphi_{3,4}(x)^3}{5^3} - 4\,\frac{\varphi_{3,4}(x)^5}{5^5}.$$

Soll a_3 von Null verschieden sein, so muss die dritte Partialfunction 5ter Classe $\varphi_{3,4}(x)$ mit dem Gliede $\alpha_{4,3}^{(3)} x^3$ anfangen und das Quadrat desselben wird $[\alpha_{4,3}^{(3)}]^2 x^6$; da aber die Gleichung (3_3) linker Hand *ein* Glied besitzt, welches mit $a_0 a_1 x$ anfängt, so muss, wenn a_0 und a_1 von Null verschieden sein sollen, in der ersten Partialfunction fünfter Classe $\varphi_{3,3}(x)$ der Coefficient des Anfangsgliedes $\alpha_{3,1}^{(3)} x$ von Null verschieden sein.

Ferner fängt dann $\varphi_{3,4}(x)^3$ jedenfalls mit x^9 und $\varphi_{3,3}(x)\cdot\varphi_{3,4}(x)$, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, mit x^4 an. Aber da die linke Seite von (2_3) mit $a_0(a_2^2 + a_0 a_4)x^4$ anfängt, so könnte auch $a_1 = 0$ und somit $\alpha_{3,1}^{(3)} = 0$ und dabei a_0 zugleich von Null verschieden sein und es wäre doch für $\varphi_{3,2}(x)$ keine andere Beschränkung, als dass kein Exponent darin vorkommen dürfte, welcher nicht congruent wäre 4 (mod. 5); wohl könnte aber $\alpha_{2,4}^{(3)} = 0$ sein.

Die linke Seite von (1_3) hat das Anfangsglied $a_0^3 a_2 x^2$; in der rechten Seite sind es nur die zwei Functionen $\varphi_{3,3}(x)^2$ und $\varphi_{3,1}(x)$, welche ein Glied mit x^2 besitzen können, alle

übrigen beginnen mit höheren Potenzen. Es muss somit entweder $\alpha^{(3)}_{3,1} = 0$ sein, oder es muss in der *zweiten* Partialfunction 5[ter] Classe $\varphi_{3,1}(x)$ der Coefficient $\alpha^{(3)}_{1,2}$ von Null verschieden sein, wenn nicht $a_2 = 0$ sein soll.

In (0_3) hat die linke Seite ein einziges Glied $a_0{}^5 x^0$, während rechter Hand nur in $\varphi_{3,0}(x)$ ein solches Glied noch vorkommen kann. Soll daher $a_0 \gtrless 0$ sein, so muss $\varphi_{3,0}(x)$ mit $\alpha^{(3)}_{0,0}$ anfangen; bei allen hier als Beispiele angeführten Schlüssen ist natürlich vorausgesetzt, dass die verlangte Potenzreihe nach ganzen Potenzen fortschreiten soll. Wir werden in den weitern Abschnitten uns das Problem stellen eine systematische Methode aufzufinden, nach der man auch die weitern Beschaffenheiten dieser Potenzreihen direct auf ähnliche zahlentheoretische Untersuchungen zurückführen könnte.

§ 17.

Andere specielle trinomische Gleichungen 5[ten] Grades.

In dem speciellen Falle der trinomischen Gleichung 5[ten] Grades können somit ausser dem oben analysirten Falle

d) $$z^5 + \varphi_{l,1}(x) z + \varphi_{l,0}(x) = 0,$$

auch noch die drei andern Fälle

a) $$z^5 + \varphi_{l,2}(x) \cdot z^2 + \varphi_{l,0}(x) = 0,$$

b) $$z^5 + \varphi_{l,3}(x) \cdot z^3 + \varphi_{l,0}(x) = 0,$$

c) $$z^5 + \varphi_{l,4}(x) \cdot z^4 + \varphi_{l,0}(x) = 0,$$

direct aus dem obigen allgemeinern durch Specialisirnng der $\varphi(x)$ hergeleitet werden.

a) Hat man z. B. die Gleichung

$$z^5 + 5\lambda_{2,5} x^5 z^2 + \lambda_{0,5} x^5 = 0,$$

also $l = 0$ und

$$\varphi_4(x) = 0; \quad \varphi_3(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 5\lambda_{2,5} x^5;$$
$$\varphi_1(x) = 0; \quad \varphi_0(x) = \lambda_{0,5} x^5,$$

d. h. es sind

(4) $p_0 = 0,$

(3) $p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0,$

(2) $p_1^2 p_3 + p_2^2 p_1 + p_3^2 p_4 + p_4^2 p_2 = -\lambda_{2,5} x^5,$

(1) $p_1^3 p_2 + p_2^3 p_4 + p_3^3 p_1 + p_4^3 p_3 + 3 p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,$

(0) $p_1^5 + p_2^5 + p_3^5 + p_4^5 -$

$$-5(p_1 p_4 - p_2 p_3)(p_1^2 p_3 - p_2^2 p_1 - p_3^2 p_4 + p_4^2 p_2) = -\lambda_{0,5} x^5.$$

Setzt man in der Gleichung $(-x)$ anstatt x, so verwandelt sich die Gleichung in

$$z^5 - 5\lambda_{2,5} x^5 z^2 - \lambda_{0,5} x^5 = 0;$$

da aber die Gleichung in der Umgebung von $x = 0$ innerhalb eines gewissen Kreises für jeden Werth von x befriedigt werden soll, wenn $z = f(x)$ gesetzt wird, so muss die Gleichung auch für $f(-x)$ innerhalb jenes Kreises befriedigt werden; es muss daher $f(-x)^5 = -f(x)^5$ sein: d. h. $f(x)$ muss eine ungerade Function von x sein, oder in unserer Sprache: $f(x)$ *muss eine erste Partialfunction zweiter Classe sein.* (Die directe Berechnung ergiebt dasselbe Resultat, nur auf etwas umständlicherem Wege.)

Es ist also ausser $p_0 = 0$ noch durch die Gesetze der simultanen subordinirten Partialfunctionen (I. Abschnitt; vgl. Vortr. d. Verf. zu Baden 1879 III und Vortr. zu Salzburg 1881 § 1, E) bekannt, dass unsere Partialfunctionen 5ter Classe

$$p_{5,1},\quad p_{5,2},\quad p_{5,3},\quad p_{5,4}$$

aus einer ersten Partialfunction zweiter Classe eigentlich Partialfunctionen 10ter Classe der ursprünglichen Hauptfunction sind und zwar müssen sie in unserem Falle auch nach der Partialisirung nach i (mod. 5) noch erste Partialfunctionen 2ter Classe bleiben, so dass die Exponenten ε zwei Congruenzen zugleich befriedigen müssen, nämlich:

$$\varepsilon \equiv 1 \text{ (mod. 2)},$$

$$\varepsilon \equiv i \text{ (mod. 5)}.$$

Da nun 2 und 5 jedenfalls relativ prim zu einander sind, so ist die simultane Befriedigung *immer* möglich. In der That hat man resp.

$$p_{10,1},\quad p_{10,7},\quad p_{10,3},\quad p_{10,9};$$

also:

$$p_1 = a_1 x + a_{11} x^{11} + a_{21} x^{21} + \cdots = p_{10,1},$$
$$p_2 = a_7 x^7 + a_{17} x^{17} + a_{27} x^{27} + \cdots = p_{10,7},$$
$$p_3 = a_3 x^3 + a_{13} x^{13} + a_{23} x^{23} + \cdots = p_{10,3},$$
$$p_4 = a_9 x^9 + a_{19} x^{19} + a_{29} x^{29} + \cdots = p_{10,9},$$

in welchen sich jetzt die Ordinalindices paarweise zu 10 ergänzen, anstatt dass sie sich sonst zu 5 ergänzten. Da die Exponenten so schnell jetzt steigen, so werden schon die ersten drei bis vier Glieder ausreichen, um die gesuchten Coefficienten bis zu einem bedeutend hohen Exponenten berechnen zu können. — Die obigen Gleichungen nehmen die Form an:

$$(0)\quad 0 = (a_1^5 + \lambda_{0,5}) x^5 + [a_3^5 + 5(a_1^4 a_{11} - a_1^3 a_3 a_9 + a_1^2 a_3^2 a_7)] x^{15} + \cdots$$

$$(1)\quad 0 = a_1 (a_3^3 + a_1^2 a_7) x^{10} + \left[\begin{matrix} a_1^3 a_{17} + 3 a_1^2 a_{11} a_7 + 3 a_1 a_3^2 a_{13} \\ + a_3^3 a_{11} + 3 a_1 a_3 a_9 a_7 \end{matrix}\right] x^{20} + \cdots$$

$$(2)\quad 0 = (a_1^2 a_3 + \lambda_{2,5}) x^5 + \left[\begin{matrix} a_1^2 a_{13} + a_3^2 a_9 + a_7^2 a_1 \\ + 2 a_1 a_3 a_{11} \end{matrix}\right] x^{15} + \cdots$$

$$(3)\quad 0 = (a_1 a_9 + a_3 a_7) x^{10} + \left[\begin{matrix} a_1 a_{19} + a_{11} a_9 \\ + a_3 a_{17} + a_{13} a_7 \end{matrix}\right] x^{20} + \cdots.$$

Aus dem Coefficienten von x^5 erhält man

in (0) $a_1^5 = -\lambda_{0,5}$, in (2) $a_3 = -\frac{\lambda_{2,5}}{a_1^2}$;

aus den Coefficienten von x^{10}

in (1) $a_7 = -\frac{a_3^3}{a_1^2}$; in (3) $a_9 = \frac{a_3^4}{a_1^3}$;

aus den Coefficienten von x^{15}

in (0) $a_{11} = \frac{9}{5} \frac{a_3^5}{a_1^4}$; in (2) $a_{13} = -\frac{28}{5} \frac{a_3^6}{a_1^5}$;

und aus dem Coefficienten von x^{20}

in (1) $a_{17} = \frac{117}{5} \frac{a_3^8}{a_1^7}$; in (3) $a_{19} = -\frac{154}{5} \frac{a_3^9}{a_1^8}$;

etc. etc.

Hier sind die Gruppen zehnter Classe; zur ersten Gruppe gehören die Grössen a_1, a_3, a_7, a_9; zur zweiten $a_{11}, a_{13}, a_{17}, a_{19}$; zur dritten $a_{21}, a_{23}, a_{27}, a_{29}$ etc. Das allgemeine Glied hat die Form

$$a_{2q+1} x^{2q+1} = \frac{\prod\limits_{1}^{q-1} \lambda \, (2q + 1 - \lambda \cdot 5)}{q!} \frac{a_3^q}{a_1^{q-1}} x^{2q+1}$$

und die Reihe ist convergent für

$$\text{Mod. } x^{10} < \text{Mod.} \left(- \frac{a_1^5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot a_3^5}\right).$$

Es ist nämlich auch hier der Quotient zweier aufeinander folgenden Zahlencoefficienten $N_{2q+11} : N_{2q+1}$ der Partialfunction 10ter Classe ein *endlicher* Ausdruck von q, und zwar besteht wiederum sowohl der Zähler als auch der Nenner aus je *vier linearen* Factoren nach q, so dass man wiederum Zähler und Nenner durch q^4 dividiren kann:

$$\frac{N_{2q+11}}{N_{2q+1}} = - \frac{(2q + 6)(2q + 1) \times (3q - 1)(3q + 4) \cdot 3}{(q + 1)(q + 2) \times (q + 4)(q + 5)}$$

$$= - \frac{\left(2 + \frac{6}{q}\right)\left(2 + \frac{1}{q}\right) \times \left(3 - \frac{1}{q}\right)\left(3 + \frac{4}{q}\right) \cdot 3}{\left(1 + \frac{1}{q}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right) \times \left(1 + \frac{4}{q}\right)\left(1 + \frac{5}{q}\right)},$$

und wenn man zur Grenze $q = \infty$ übergeht:

$$\lim_{q=\infty} \frac{N_{2q+11}}{N_{2q+1}} = - 2^2 \cdot 3^3.$$

Für eine Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_2 z^2 + A_0 = 0$$

hat man nur die Werthe

$$A_2 = 5 \lambda_{2,5} x^5; \qquad A_0 = \lambda_{0,5} x^5$$

einzusetzen und man erhält die fünf Wurzeln durch die obige Reihe, so lange die Bedingung erfüllt ist:

$$\text{Mod. } \frac{\left(\frac{A_2}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{3}\right)^3} < (-2)^{-2}.$$

Genau dieselbe Bedingung (Discriminante) würde man erhalten für die übrigen vier cyklischen Gleichungen des Systems, welche in

$$z^5 + \varphi_{l,2}(x)\, z^2 + \varphi_{l,0}(x) = 0$$

enthalten sind für

$$l = 1, 2, 3, 4.$$

b) Hat man die Gleichung

$$z^5 + \varphi_{l,3}(x)\, z^3 + \varphi_{l,0}(x) = 0,$$

so haben $\varphi_{l,4}(x)$, $\varphi_{l,2}(x)$ und $\varphi_{l,1}(x)$ die speciellen Werthe

$$\varphi_{l,4}(x) = 0, \quad \varphi_{l,2}(x) = 0, \quad \varphi_{l,1}(x) = 0,$$

also:

$$(4_l) \quad p_l = 0,$$

$$(3_l) \quad p_{l+1}\, p_{l+4} + p_{l+2}\, p_{l+3} = -\frac{\varphi_{l,3}(x)}{5},$$

$$(2_l) \quad p_{l+1}^2\, p_{l+3} + p_{l+2}^2\, p_{l+1} + p_{l+3}^2\, p_{l+4} + p_{l+4}^2\, p_{l+2} = 0,$$

$$(1_l) \quad p_{l+1}^3\, p_{l+2} + p_{l+2}^3\, p_{l+4} + p_{l+3}^3\, p_{l+1} + p_{l+4}^3\, p_{l+3}$$
$$+ 3 p_{l+1}\, p_{l+2}\, p_{l+3}\, p_{l+4} = \frac{\varphi_{l,3}(x)^2}{5^2},$$

$$(0_l) \quad p_{l+1}^5 + p_{l+2}^5 + p_{l+3}^5 + p_{l+4}^5 - 5(p_{l+1}\, p_{l+4} - p_{l+2}\, p_{l+3})$$
$$\times (p_{l+1}^2 p_{l+3} - p_{l+2}^2 p_{l+1} - p_{l+3}^2 p_{l+4} + p_{l+4}^2 p_{l+2}) = -\varphi_{l,0}(x),$$

Für den speciellen Fall $l = 0$ erhält man somit, wenn die Bedingungen:

$$\varphi_{0,3}(x) = 5\mu_{3,5}\, x^5 + (\text{höhere Potenzen von } x^5) + \cdots,$$
$$\varphi_{0,0}(x) = \mu_{0,5}\, x^5 + (\text{höhere Potenzen von } x^5) + \cdots,$$

welche sich aus (3_l) resp. (0_l), falls die gesuchte Hauptfunction nach ganzen positiven Potenzen fortschreiten soll, unmittelbar ergeben, wirklich erfüllt sind, aus (2_l)

$$0 = a_1(a_2^2 + a_1 a_3)\, x^5 + (\text{höhere Potenzen}) + \cdots,$$

und aus (1_l)

$$0 = a_1^3 a_2\, x^5 + (\text{höhere Potenzen}) + \cdots,$$

während aus (0_l) folgt:

$$0 = (a_1^5 + \mu_{0,5})\, x^5 + (\text{höhere Potenzen}) + \cdots.$$

Ist also $\mu_{0,5}$ und somit a_1 von Null verschieden, so muss

$$a_2 = 0 \quad \text{und zugleich} \quad a_3 = 0$$

sein. Dann folgt aber aus (3_l)

$$0 = (a_1 a_4 + \mu_{3,5})\, x^5 + (\text{höhere Potenzen von } x^5) + \cdots,$$

wenn $\mu_{3,5}$ von Null verschieden ist, dass auch a_4 von Null verschieden sein muss. Ist noch specieller

$$\mu_{3,10} = \mu_{3,15} = \cdots = 0; \quad \mu_{0,10} = \mu_{0,15} = \cdots = 0,$$

also:

$$\varphi_{0,3}(x) = 5\mu_{3,5}\, x^5,$$
$$\varphi_{0,0}(x) = \mu_{0,5}\, x^5,$$

so kann man die obigen Schlüsse auch hier in ganz analoger Weise anwenden. Setzt man nämlich in unserer Gleichung

$$r_3^{\pm 1} x \quad \text{anstatt } x,$$

so erhält man:

$$z^5 + r_3^{\pm 2} \cdot 5\mu_{3,5}\, x^5 z^3 + r_3^{\pm 2} \cdot 5\mu_{0,5}\, x^5 = 0;$$

weil aber $z_h = f(r_3^h x)$ die Gleichung befriedigen muss, wenn $z = f(x)$ sie befriedigt, so genügt $z = f(x)$ der Gleichung für jeden Werth von x in der Umgebung von $x = 0$, wenn die Bedingungen

$$(1) \qquad (z_{\pm 3})^3 = f(r_3^{\pm 1} x)^3 = f(x)^3 = z^3$$

und

$$(2) \qquad (z_{\pm 3})^5 = f(r_3^{\pm 1} x)^5 = r_3^{\pm 2} f(x)^5 = r_3^{\pm 2} z^5$$

erfüllt werden.

(Vergleicht man diese Beschränkung mit der obigen, wo $f(x)$ eine ungerade Function sein musste, so erhellt unmittelbar, wie zweckmässig und natürlich es ist, die Verallgemeinerung des Begriffes der geraden und ungeraden Functionen, welche in den zwei Functionalgleichungen

$$F(-x) = F(x),$$
$$F(-x) = -F(x)$$

durch die n allgemeinern Functionalgleichungen, welche in

$$F(r_n^h x) = r_n^k F(x)$$

enthalten sind, einzuführen. Die von uns an anderer Stelle

gebrauchte weitere Verallgemeinerung zeigt sich ebenso zweckmässig und natürlich.) Ist nun $f(x) = F_{n,i}(x)$, so ist nach (Ω) (p. 32) $f(x)^m = F_{n,i}(x)^m = \psi_{n,mi}(x)$, und unsere Bedingungen (1) und (2) werden offenbar zugleich befriedigt für

$$n = 3 \quad \text{und} \quad i = 1,$$

aber auch nur für solche Werthe. Denn für $m = 3$ erhält man aus (1):

$$3i + qn \equiv 0 \pmod{3}$$

und für $m = 5$ aus (2):

$$5i + pn \equiv 2 \pmod{3},$$

also $n \equiv 0 \pmod{3}$ und $2i \equiv 2 \pmod{3}$, oder $i \equiv 1 \pmod{3}$. Soll aber $a_1 \gtrless 0$ sein, so muss $i = 1$ sein, und weil $a_4 \gtrless 0$ ist, so kann auch nicht $n > 3$ sein, also ist $n = 3$, es ist somit die gesuchte Hauptfunction $f(x)$ eine erste Partialfunction 3ter Classe, wie behauptet wurde. Die dann aus derselben gebildeten Partialfunctionen 5ter Classe sind also, als Partialfunctionen einer gewissen ursprünglichen Hauptfunction, solche 15ter Classe. Auch hier ist es immer möglich die zwei Congruenzen $\varepsilon \equiv 1 \pmod{3}$ und $\varepsilon \equiv i \pmod{5}$ zugleich zu befriedigen, und zwar hat man in der That respective:

$$\begin{aligned}
p_{5,1} &= f_{15,1}(x) = a_1 x^1 + a_{16} x^{16} + a_{31} x^{31} + \cdots,\\
p_{5,4} &= f_{15,4}(x) = a_4 x^4 + a_{19} x^{19} + a_{34} x^{34} + \cdots,\\
p_{5,2} &= f_{15,7}(x) = a_7 x^7 + a_{22} x^{22} + a_{37} x^{37} + \cdots,\\
p_{5,3} &= f_{15,13}(x) = a_{13} x^{13} + a_{28} x^{28} + a_{43} x^{43} + \cdots,
\end{aligned}$$

welche, in die obigen Fundamentalgleichungen eingesetzt, die Bedingungen liefern:

$$(3_0) \quad 0 = (a_1 a_4 + \mu_{3,5}) x^5 + (a_1 a_{19} + a_4 a_{16} + a_7 a_{13}) x^{20} + \left.\begin{array}{l} + a_1 a_{34} + a_{16} a_{19} + a_{31} a_4 \\ + a_7 a_{28} + a_{22} a_{13} \end{array}\right| x^{35} + \cdots$$

$$(2_0) \quad 0 = \left.\begin{array}{l} a_1 (a_7^2 + a_1 a_{13}) \\ + a_4^2 a_7 \end{array}\right| x^{15} \left.\begin{array}{l} + a_1^2 a_{28} + a_7^2 a_{16} + a_{13}^2 a_4 + a_4^2 a_{22} \\ + 2(a_1 a_{16} a_{13} + a_7 a_{22} a_1 + a_4 a_{19} a_7) \end{array}\right| x^{30} + \cdots$$

$$(1_0)\quad 0=(a_1^3a_7-\mu_{3,5}^2)x^{10}+\left.\begin{array}{l}a_1^3a_{22}+a_7^3a_4+a_4^3a_{13}\\+3a_1^2a_{16}a_7+3a_1a_7a_{13}a_4\end{array}\right|x^{25}+\cdots$$

$$(0_0)\quad 0=(a_1^5+\mu_{0,5})x^5$$

$$+5\left(a_1^4a_{16}+\frac{a_4^5}{5}-a_1^3a_4a_{13}+a_1^2a_7^2a_4-a_1a_4^3a_7\right)x^{20}+$$

$$\left.\begin{array}{l}+a_7^5+5(a_1^4a_{31}+a_4^4a_{19}-a_1^3a_4a_{28}\\ \qquad +a_1a_4a_7^2a_{16}+a_1a_4^2a_{13}^2-a_1a_4^3a_{22})\\ -10(a_1^2a_4a_{16}a_{13}-a_1^2a_4a_7a_{22}\\ \qquad +a_1a_4^2a_7a_{19}-a_1^3a_{16}^2)\\ -5(a_1a_{19}+a_4a_{16}-a_7a_{13})\times\\ \qquad\times(a_1^2a_{13}-a_7^2a_1+a_4^2a_7)\end{array}\right\}x^{35}+\cdots$$

Aus den Coefficienten von x^5 erhält man zunächst:

in (0_0) $a_1^5=-\mu_{0,5}$; in (3_0) $a_4=-\dfrac{\mu_{3,5}}{a_1}$;

dann aus den Coefficienten von x^{10}

$$\text{in } (1_0)\quad a_7=\frac{\mu_{3,5}^2}{a_1^3}=\frac{a_4^2}{a_1}$$

und aus dem von x^{15}

$$\text{in } (2_0)\quad a_{13}=-2\frac{\mu_{3,5}^4}{a_1^7}=-2\frac{a_4^4}{a_1^3}.$$

Ferner aus den Coefficienten von x^{20}

in (0_0) $a_{16}=-\dfrac{11}{5}\dfrac{a_4^5}{a_1^4}$; in (3_0) $a_{19}=\dfrac{21}{5}\dfrac{a_4^6}{a_1^5}$;

dann aus dem Coefficienten von x^{25} in (1_0)

$$a_{22}=\frac{68}{5}\frac{a_4^7}{a_1^6}$$

und aus dem Coefficienten von x^{30} in (2_0)

$$a_{28}=-\frac{299}{5}\frac{a_4^9}{a_1^8}.$$

Ebenso aus den Coefficienten von x^{35}

in (0_0) $a_{31}=-\dfrac{2002}{5^2}\dfrac{a_4^{10}}{a_1^9}$, in (3_0) $a_{34}=+\dfrac{4408}{5^2}\dfrac{a_4^{11}}{a_1^{10}}$,

etc. etc. Das allgemeine Bildungsgesetz des Zahlencoefficienten ist

$$N_{3p+1} = \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{p-1}(3p+1-5\cdot\lambda)}{p!},$$

der Quotient zweier aufeinander folgenden Coefficienten der Partialfunction 15ter Classe hat nach Division von Zähler und Nenner durch p^5 die Gestalt:

$$\frac{N_{3p+16}}{N_{3p+1}} = \frac{\left(3+\frac{11}{p}\right)\left(3+\frac{6}{p}\right)\left(3+\frac{1}{p}\right)\times\left(2-\frac{26}{p}\right)\left(2-\frac{21}{p}\right)}{\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{p}\right)\left(1+\frac{3}{p}\right)\times\left(1+\frac{4}{p}\right)\left(1+\frac{5}{p}\right)},$$

so dass sich für $p = \infty$ der Grenzwerth direct ergiebt

$$\lim_{p=\infty} \frac{a_{3p+16}}{a_{3p+1}}\, x^{15} = 3^3 \cdot 2^2 \cdot \frac{a_4^5}{a_1^5}\, x^{15},$$

also ist die Reihe convergent für

$$\text{Mod. } x^{15} < \text{Mod. } \frac{a_1^5}{3^3 \cdot 2^2 \cdot a_4^5}$$

und liefert dieselbe für jeden Werth von x innerhalb dieses Kreises die fünf Wurzeln einer Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_3 z^3 + A_0 = 0,$$

so lange die Bedingung der Discriminante

$$\text{Mod. } 3^3 \cdot \frac{\left(\frac{A_3}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2} < 1$$

erfüllt ist.

Dieselbe Discriminante erscheint für die übrigen vier Gleichungen des cyklischen Systems, welche für $l = 1, 2, 3, 4$ in

$$z^5 + \varphi_{l,3}(x)\, z^3 + \varphi_{l,0}(x) = 0$$

enthalten sind.

c) Hat man endlich die l^{te} cyklische trinomische Gleichung, in welcher der Coefficient von z^4 von Null verschieden ist:

$$z^5 + \varphi_{l,4}(x)\, z^4 + \varphi_{l,0}(x) = 0,$$

so dass die drei aufeinander folgenden Coefficienten

$$\varphi_{l,3}(x) = 0; \quad \varphi_{l,2}(x) = 0; \quad \varphi_{l,1}(x) = 0$$

sind, so braucht man wiederum nur diese speciellen Werthe in den allgemeinen Fundamentalgleichungen in § 16 einzusetzen. Nehmen wir diesmal $l = 1$ und setzen noch der Einfachheit wegen

$$\varphi_{1,4}(x) = 5\nu_{1,1}x,$$
$$\varphi_{1,0}(x) = \nu_{0,0},$$

so erhalten wir die einfachen Bedingungsgleichungen:

$$(4_1)\quad p_1 = -\nu_{1,1}x,$$
$$(3_1)\quad p_2p_0 + p_3p_4 = +2\nu_{1,1}^2x^2,$$
$$(2_1)\quad p_2^2p_4 + p_3^2p_2 + p_4^2p_0 + p_0^2p_3 = -4\nu_{1,1}^3x^3,$$
$$(1_1)\quad p_2^3p_3 + p_3^3p_0 + p_4^3p_2 + p_0^3p_4 + 3p_2p_3p_4p_0 = +7\nu_{1,1}^4x^4,$$
$$(0_1)\quad p_2^5 + p_3^5 + p_4^5 + p_0^5 - 5(p_2p_0 - p_3p_4)(p_2^2p_4 - p_3^2p_2 - p_4^2p_0 + p_0^2p_3) = -\nu_{0,0} - 4\nu_{1,1}^5x^5.$$

Ein Blick auf das System der Gleichungen genügt, um zu bemerken, dass diesmal die Anfangscoefficienten der einzelnen Partialfunctionen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

alle von Null verschieden sind, wenn $\nu_{1,1}$ und $\nu_{0,0}$ es sind; man nimmt daher in diesem Falle eine *vollständige* Hauptfunction, in welcher *nur* die Grössen $a_{5q+1} = 0$ sind für $q > 0$, sonst aber *alle* von Null verschieden sind.

(Dass in der *ersten* Partialfunction p_1 der erste Coefficient $a_1 = \nu_{1,1}$ diesmal von Null verschieden ist, während alle übrigen verschwinden, das liegt daran, dass wir es diesmal nicht mehr mit der Reducente zu thun haben; in allen früheren Fällen, wo wir es mit trinomischen Gleichungen zu thun hatten, in denen der Coefficient von z^{n-1} Null war, konnten wir das feste Gesetz bemerken, *dass die Coefficienten irgend einer zugehörigen Partialfunction entweder* **alle** *verschwinden, oder* **alle** *von Null verschieden sind.* Es ist sehr bemerkenswerth, dass diese charakteristischen Eigenschaften zugleich den Functionen, die Wurzeln jener Gleichungen in der oben angegebenen Weise darstellen, als auch gewissen periodischen Functionen ge-

hören. In einem späteren Abschnitt werden wir davon weiteren Gebrauch machen.)

Die wirkliche Berechnung liefert dann nach Weglassung in (3_1), (2_1) und (1_1) respective der Factoren x^2, x^3 und x^4

$$(3_1)\quad 0 = (a_2 a_0 - 2\nu_{1,1}^2) + (a_0 a_7 + a_5 a_2 + a_3 a_4)\, x^5 + \left.\begin{matrix} + a_0 a_{12} + a_5 a_7 + a_{10} a_2 \\ + a_3 a_9 + a_8\, a_4 \end{matrix}\right| x^{10} + \left.\begin{matrix} + a_0 a_{17} + a_5 a_{12} + a_{10} a_7 + a_{15} a_2 \\ + a_3 a_{14} + a_8\, a_9 + a_{13} a_4 \end{matrix}\right| x^{15} + \cdots$$

$$(2_1)\quad 0 = (a_0^2 a_3 + 4\nu_{1,1}^3) + \left.\begin{matrix} a_0^2 a_8 + a_2^2 a_4 + a_3^2 a_2 + a_4^2 a_0 \\ + 2 a_0 a_5 a_3 \end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix} + a_0^2 a_{13} + a_5^2 a_3 + a_2^2 a_9 + a_3^2 a_7 + a_4^2 a_5 \\ + 2(a_0 a_5 a_8 + a_0 a_{10} a_3 + a_2 a_7 a_4 + a_3 a_8 a_2 \\ + a_4 a_9 a_0) \end{matrix}\right| x^{10} + \cdots$$

$$(1_1)\quad 0 = (a_0^3 a_4 - 7\nu_{1,1}^4) + \left.\begin{matrix} a_2^3 a_3 + a_3^3 a_0 + a_0^3 a_9 \\ + 3(a_0^2 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_4 a_0) \end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix} + a_2^3 a_8 + a_3^3 a_5 + a_4^3 a_2 + a_0^3 a_{14} \\ + 3(a_2^2 a_7 a_3 + a_3^2 a_8 a_5 + a_0^2 a_5 a_9) \\ + 3(a_5^2 a_0 a_4 + a_0^2 a_{10} a_4) \\ + 3[a_0 a_2 (a_3 a_9 + a_4 a_8) + a_3 a_4 (a_0 a_7 + a_5 a_2)] \end{matrix}\right| x^{10} + \cdots$$

$$(0_1)\quad 0 = (a_0^5 + \nu_{0,0}) + (5 a_0^4 a_5 - 5 a_0^3 a_2 a_3 + 4\nu_{1,1}^5)\, x^5 + \left.\begin{matrix} + 5\Big[a_0^4 a_{10} + 2 a_0^3 a_5^2 + \frac{1}{5} a_2^5 + a_0 a_2^2 a_3^2 \\ - a_0^3 a_3 a_7 + a_2 a_0^2 a_4^2 + a_4 a_0^2 a_3^2 \\ - a_0^3 a_2 a_8 - a_2^3 a_0 a_4 - 3 a_0^2 a_2 a_3 a_5\Big] \end{matrix}\right\} x^{10} + \cdots$$

Es folgt nun für die Grössen der ersten Gruppe aus den Coefficienten von x^0

in (0_1) $\quad a_0^5 = -\nu_{0,0}$; $\quad$ in (3_1) $\quad a_2 = \dfrac{2\nu_{1,1}^2}{a_0}$;

in (2_1) $\quad a_3 = -\dfrac{4\nu_{1,1}^3}{a_0^2}$; $\quad$ in (1_1) $\quad a_4 = \dfrac{7\nu_{1,1}^4}{a_0^3}$;

dann für die vier Grössen der zweiten Gruppe aus den Coefficienten von x^5

$$\text{in } (0_1) \quad a_5 = -\frac{44}{5}\frac{\nu_{1,1}^5}{a_0^4}; \qquad \text{in } (3_1) \quad a_7 = +\frac{228}{5}\frac{\nu_{1,1}^7}{a_0^6},$$

$$\text{in } (2_1) \quad a_8 = -\frac{897}{5}\frac{\nu_{1,1}^8}{a_0^7}; \qquad \text{in } (1_1) \quad a_9 = +\frac{2244}{5}\frac{\nu_{1,1}^9}{a_0^8},$$

und ferner für die Grössen der dritten Gruppe aus den Coefficienten von x^{10}

$$\text{in } (0_1) \quad a_{10} = -\frac{17732}{5^2}\frac{\nu_{1,1}^{10}}{a_0^9} = -\frac{4\cdot 11\cdot 13\cdot 31}{5^2}\frac{\nu_{1,1}^{10}}{a_0^9};$$

$$\text{in } (3_1) \quad a_{12} = \frac{121771}{5^2}\frac{\nu_{1,1}^{12}}{a_0^{11}} = \frac{13\cdot 17\cdot 19\cdot 29}{5^2}\frac{\nu_{1,1}^{12}}{a_0^{11}};$$

etc. etc. Der allgemeine Zahlencoefficient hat, wie aus der allgemeineren Formel in Capitel II § 6 direct herzuleiten ist, die Form

$$N_q = (-1)^q \frac{\prod_{\lambda=1}^{q-1} (4\cdot q + 1 - 5\cdot\lambda)}{q!},$$

und der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder irgend einer Partialfunction 5ter Classe der Hauptreihe hat nach Division von Zähler und Nenner mit q^5 die Gestalt:

$$\frac{a_{q+5}}{a_q}x^5 = \frac{\left(4+\frac{16}{q}\right)\left(4+\frac{11}{q}\right)\left(4+\frac{6}{q}\right)\left(4+\frac{1}{q}\right)\times\left(1-\frac{1}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{q}\right)\left(1+\frac{4}{q}\right)\left(1+\frac{5}{q}\right)}\frac{\nu_{1,1}^5}{a_0^5}x^5,$$

so dass der Grenzwerth sich wiederum direct ergiebt:

$$\lim_{q=\infty}\frac{a_{q+5}}{a_q}x^5 = 4^4\cdot 1^1\frac{\nu_{1,1}^5}{a_0^5}x^5$$

und die Reihe ist convergent für

$$\text{Mod.}\, x^5 < \text{Mod.}\,\frac{a_0^5}{4^4\cdot\nu_{1,1}^5},$$

und somit werden die Wurzeln von der Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_4 z^4 + A_0 = 0$$

durch jene Reihe dargestellt, wenn die Bedingung

$$\text{Mod. } 4^4 \frac{\left(\frac{A_4}{5}\right)^5}{(-A_0)^1} < 1$$

erfüllt wird.

§ 18.

Darstellung der Wurzeln ausserhalb der Convergenzkreise der obigen Reihen.

A. *Eine Hauptfunction $f(x)$ soll durch ihre circumplexen Functionen dritter Classe drei Wurzeln liefern, während die zwei circumplexen Functionen zweiter Classe einer andern Hauptfunction die übrigen zwei Wurzeln repräsentiren.*

a) Wir haben bis jetzt verlangt, alle 5 Wurzeln der Gleichung sollen durch die circumplexen Functionen 5ter Classe *einer* Hauptfunction repräsentirt werden. Modificiren wir nunmehr in folgender Weise die

Aufgabe. Wie müssen die Coefficienten $\varphi(x)$ in der Gleichung

$$F(z,x) = z^5 + \varphi_4(x)\cdot z^4 + \varphi_3(x)\cdot z^3 + \varphi_2(x)\cdot z^2 + \varphi_1(x)\cdot z + \varphi_0(x) = 0$$

beschaffen sein, damit die **zwei** *circumplexen Functionen* **zweiter** *Classe $\mathfrak{F}(r_2^{h_2} x)$, oder auch $\mathfrak{c}_{h_2} = \mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_2$, für $h_2 = 0, 1$ einer als gegeben vorausgesetzten Hauptfunction*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{a}_2 x^2 + \cdots + \mathfrak{a}_q x^q + \cdots$$

zwei *Wurzeln der Gleichung $F(z,x) = 0$ in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ liefern, während für dieselben Werthe von x die* **drei** *circumplexen Functionen* **dritter** *Classe $f(r_3^{h_3} x)$, oder auch c_0, c_1, c_2, für $h_3 = 0, 1, 2$ einer anderen Hauptfunction*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_q x^q + \cdots$$

die **drei** *übrigen Wurzeln innerhalb desselben Gebietes geben sollen; respective, wie müssen $\mathfrak{F}(x)$ und $f(x)$ beschaffen sein, wenn die $\varphi(x)$ gegeben sind?* —

Auflösung. Zunächst ist klar, dass die Summe beider circumplexen Functionen zweiter Classe $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{F}(-x)$ mitsammt der Summe der drei circumplexen Functionen dritter Classe $f(x)$, $f(r_3 x)$, $f(r_3^2 x)$ zusammen für jedes x den mit (-1) multiplicirten Coefficienten von x^4 liefern müssen, d. h. es ist:

$$(\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1) + (c_0 + c_1 + c_2) = -\varphi_4(x);$$

da aber nach den Fundamentalsätzen $(\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1) = 2\mathfrak{p}_0$ und $c_0 + c_1 + c_2 = 3p_0$ ist, so bekommen wir die Bedingung:

$$(4) \qquad 2\mathfrak{p}_0 + 3p_0 = -\varphi_4(x).$$

Ferner ist die Summe der Producte zu je zwei von $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1$; c_0, c_1, c_2 identisch mit

$$(\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_1) + (\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1)(c_0 + c_1 + c_2) + (c_0 c_1 + c_0 c_2 + c_1 c_2)$$
$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} + 2 \cdot 3\mathfrak{p}_0 \cdot p_0 + 3 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix};$$

also hat man

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} + 6\mathfrak{p}_0 p_0 + 3 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} = \varphi_3(x).$$

Dann ist die Summe der Producte zu je drei von $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1$; c_0, c_1, c_2 genau:

$$c_0 c_1 c_2 + (\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1)(c_0 c_1 + c_0 c_2 + c_1 c_2) + (\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_1)(c_0 + c_1 + c_2)$$
$$= \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 6\mathfrak{p}_0 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 3p_0 \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix},$$

und somit ist

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 6\mathfrak{p}_0 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 3p_0 \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} = -\varphi_2(x).$$

Analog ist die Summe der Producte zu je vier von $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1$; c_0, c_1, c_2

$$c_0 c_1 c_2 (\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1) + (c_0 c_1 + c_0 c_2 + c_1 c_2)\,\mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}_1$$
$$= 2 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} \mathfrak{p}_0 + 3 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix},$$

also hat man:

$$(1)\qquad 2\mathfrak{p}_0 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} = \varphi_1(x).$$

Endlich ist das Product aller Wurzeln

$$\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_1 \cdot c_0 \cdot c_1 \cdot c_2 = (\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_1)(c_0 \cdot c_1 \cdot c_2),$$

und somit hat man die fünfte Bedingungsgleichung

$$(0)\qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} = -\varphi_0(x).$$

Aus (4) ergiebt sich, dass $\varphi_4(x)$ nur solche Glieder besitzen darf, deren Exponenten *entweder* die Congruenz

$$(w_2)\qquad \varepsilon_2 \equiv 0 \pmod{2},$$

oder die Congruenz

$$(w_3)\qquad \varepsilon_3 \equiv 0 \pmod{3}$$

befriedigen. Die Coefficienten der ersteren sind identisch mit den entsprechenden in $2\mathfrak{p}_0$ und die der letzteren mit den entsprechenden in $3p_0$ allein; die Coefficienten solcher Glieder aber, deren Exponenten beide Congruenzen zugleich befriedigen, (die also zur subordinirten nullten Partialfunction *zweiter* aus der *dritter* Classe, oder umgekehrt, oder auch zur nullten Partialfunction $(2 \cdot 3)^{\text{ter}} = 6^{\text{ter}}$ Classe gehören), die sind identisch mit den entsprechenden Coefficienten in der *Summe* $2\mathfrak{p}_0 + 3p_0$.

b) Für die Reducente, wo $\varphi_4(x) = 0$ ist, müssen beide Hauptfunctionen so beschaffen sein, dass die Coefficienten derjenigen Glieder, deren Exponenten beziehungsweise *eine* der obigen Congruenzen (w_2) oder (w_3) befriedigen, identisch verschwinden; dagegen bleiben diejenigen bestehen, deren Exponenten *beide* Congruenzen *zugleich* befriedigen; es brauchen also die Grössen

$$a_0,\ a_6,\ a_{12},\ \cdots,\ a_{6q},\ \cdots,$$
$$\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_{12},\ \cdots,\ \mathfrak{a}_{6q},\ \cdots$$

nicht einzeln Null zu sein, wohl müssen aber, wie aus der identischen Gleichung

$$(4') \quad 0 = 2\mathfrak{a}_0 + 3a_0 + (2\mathfrak{a}_6 + 3a_6)x^6 + (2\mathfrak{a}_{12} + 3a_{12})x^{12} + \cdots$$

folgt, die Bedingungen

$$2\mathfrak{a}_{6q} + 3a_{6q} = 0; \qquad (q = 0, 1, 2, 3, \cdots, \infty)$$

bestehen. — Bleiben wir nun bei diesem Falle stehen, so haben wir

$$\mathfrak{p}_0 = -\frac{3}{2}p_0.$$

c) Nehmen wir noch der grösseren Einfachheit wegen an, es sei auch

$$\varphi_3(x) = 0,$$

was man bekanntlich immer durch Auflösung einer quadratischen Gleichung erreichen kann, so werden wir aus (3) den Werth

$$(3') \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} = 6p_0^2 + 3p_1 p_2$$

in (0), (1) und (2) einsetzen können und bekommen:

$$(0') \qquad 3\begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix}(2p_0^2 + p_1p_2) = -\varphi_0(x);$$

$$(1') \qquad 3p_0\begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} - 9(p_0^2 - p_1p_2)(2p_0^2 + p_1p_2) = -\varphi_1(x);$$

$$(2') \qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 9p_0(p_0^2 + 2p_1p_2) = -\varphi_2(x).$$

Wir werden nun sehen, dass die drei Bedingungsgleichungen (0'), (1'), (2') vollkommen ausreichen, um durch Auflösungen von lauter (allerdings im Allgemeinen unendlich vielen) Systemen linearer Gleichungen die Coefficienten der Hauptfunction $f(x)$ durch die der als gegeben vorausgesetzten Reihen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *eindeutig* (bis auf einen Coefficienten, zu dessen Bestimmung eine binomische Gleichung 3ten Grades vorhanden ist) auszudrücken; während die zwei

Gleichungen (3′) und (4′) dann ganz analog Systeme von linearen Gleichungen (bis auf eine einzige binomische) liefern, um durch sie die Coefficienten von $\mathfrak{F}(x)$ durch die von $f(x)$ ($\varphi_3(x)$ und $\varphi_4(x)$ sind ja in unserem Falle, als identisch Null vorausgesetzt worden) *eindeutig* auszudrücken.

Hätten wir zuerst aus drei Gleichungen die p eliminirt, so hätten wir umgekehrt zuerst zwei Bedingungsgleichungen erhalten, um die Coefficienten von $\mathfrak{F}(x)$ durch die der $\varphi(x)$ zu bestimmen und dann drei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Coefficienten von $f(x)$ durch die von $\mathfrak{F}(x)$ resp. der $\varphi(x)$.

Durch Anwendung der oben schon oft wiederholten Schlüsse erhält man jedenfalls die analoge Beschränkung für die Coefficienten der gegebenen Gleichung $\varphi_0(x)$; $\varphi_1(x)$; $\varphi_2(x)$, dass sie alle nämlich lediglich nur Exponenten besitzen können, welche mit den entsprechenden in den ausgerechneten linken Seiten übereinstimmen.

d) Wir haben in den obigen Beispielen immer angenommen, die Hauptfunction schreite nach ganzen positiven Exponenten fort. Es ist aber bereits oben in Capitel III § 11 gezeigt worden, dass diese Einschränkung keine nothwendige ist. Derjenige Fall nun, wo die Reihe *lauter* negative Exponenten besitzt, ist direct aus den behandelten Beispielen zu erhalten, wenn man $x = \frac{1}{t}$ in der Gleichung sowohl, wie in der Reihe setzt. Nunmehr wollen wir auch noch die Möglichkeit zulassen, dass die Reihe mit einem negativen endlichen Exponenten anfängt und weitere Exponenten um positive Einheiten zunehmend wachsen. Der umgekehrte Fall, dass die Reihe mit einem positiven Exponenten anfängt und dann immer abnehmend fortschreitet, ist aus dem eben erwähnten Falle wieder durch die Substitution von x^{-1} anstatt x zu erhalten.

Der Definition der Partialfunctionen gemäss unterscheiden sich die Ordinalindices der aufeinander folgenden n Partialfunctionen n^{ter} Classe *immer um eine Einheit.* Bezeichnen wir den Exponenten des ersten Gliedes der Hauptfunction, welche mit einem positiven, oder negativen Exponenten anfängt, jedoch nach ganzen um positive Einheiten steigenden

Potenzen geordnet ist, mit $\pm \varepsilon$, so dass die Hauptfunction die Form hat

$$f_{\pm\varepsilon}(x) = a_{\pm\varepsilon} x^{\pm\varepsilon} + a_{\pm\varepsilon+1} x^{\pm\varepsilon+1} + a_{\pm\varepsilon+2} x^{\pm\varepsilon+2} + \cdots,$$

so wird ε offenbar der *grösste negative*, oder der *kleinste* positive Exponent der Reihe sein. (In der Sprache der Functionentheorie würde das heissen: wenn man die Reihe mit $x^{\mp\varepsilon}$ multipliciren würde, so würde das Product für $x = 0$ nicht mehr verschwinden, resp. unendlich werden.)

Die aufeinanderfolgenden Anfangsglieder von*)

$$p^3_{\pm\varepsilon},\; p^3_{\pm\varepsilon+1},\; p^3_{\pm\varepsilon+2};\quad p_{\pm\varepsilon} \cdot p_{\pm\varepsilon+1} \cdot p_{\pm\varepsilon+2}$$

besitzen beziehungsweise die Exponenten:

$$\pm 3\varepsilon,\quad \pm 3\varepsilon + 3,\quad \pm 3\varepsilon + 6;\quad \pm 3\varepsilon + 3,$$

unter denen die kleinste positive oder die grösste negative Zahl $\pm \varepsilon$ nur *ein einziges* Mal auftritt und das betreffende Glied hat die Form $a^3_{\pm\varepsilon} x^{\pm 3\varepsilon}$. (Es ist allerdings hier die Voraussetzung gemacht worden, dass $a_{\pm\varepsilon+1}$ und $a_{\pm\varepsilon+2}$ von Null verschieden sind; sollte dieses aber nicht der Fall sein, so würden unsere Schlüsse, wie man leicht sieht, um so eher gelten.) Es tritt also ein solches Glied in der Summe jener Grössen

$$p^3_{\pm\varepsilon} + p^3_{\pm\varepsilon+1} + p^3_{\pm\varepsilon+2} - 3p_{\pm\varepsilon} \cdot p_{\pm\varepsilon+1} \cdot p_{\pm\varepsilon+2}$$

wohl auf, oder nicht, jenachdem $a_{\pm\varepsilon}$ von Null verschieden, oder der Null gleich ist. Addirt man noch zu dieser Determinante den Ausdruck

$$9p_0(p_0{}^2 + 2p_1p_2),$$

so bekommen dadurch gewisse Glieder andere Zahlencoefficienten, die Dimension und das Gewicht der einzelnen Glieder ändern sich aber durch diese Hinzufügung durchaus nicht; so dass man aussagen kann:

Besitzt die Hauptfunction, welche durch ihre drei circumplexen Functionen drei Wurzeln der Gleichung für unseren Fall liefern soll, das Anfangsglied $a_{\pm\varepsilon} x^{\pm\varepsilon}$, so besitzt der

---

*) Die hier gemachten Bemerkungen sind für die Glieder der ausgerechneten cyclosymmetrischen Determinante n^{ter} Classe direct zu übertragen.

Coefficient von z^2 *der gegebenen Gleichung, nämlich* $\varphi_2(x)$, *das Anfangsglied* $a^3_{\pm\varepsilon} x^{\pm 3\varepsilon}$. *Und umgekehrt.*

Ist also z. B. $\varphi_2(x) = 5\lambda_{2,\varrho} x^\varrho$ gegeben, so ist dadurch das Anfangsglied derjenigen Hauptfunction $f(x)$, welche drei Wurzeln liefern soll, völlig bestimmt, nämlich $(5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{1}{3}} x^{\frac{\varrho}{3}}$. Nach einem Schlusse, der oben schon oft wiederholt wurde, heisst dieses, *wenn* $\varphi_2(x)$ *eine Potenzreihe ist, deren Exponenten Vielfache von* ϱ *sind, so sind die Exponenten der Hauptfunction* $f(x)$ *Vielfache von* $\frac{\varrho}{3}$.

Daraus folgt, dass p_0 und somit, auf Grund der Relation

$$\mathfrak{p}_0 = -\frac{3}{2} p_0,$$

auch $\mathfrak{p}_0$ **lauter ganze Potenzen von** x^ϱ **besitzen.** Schreitet eine Potenzreihe nach ganzen Potenzen von x^λ fort, so schreitet offenbar die nullte Partialfunction n^{ter} Classe derselben nach ganzen Potenzen von $x^{n\cdot\lambda}$ fort. Ist $n = 2$; $n \cdot \lambda = \varrho$, d. h. $2\lambda = \varrho$, so ist $\lambda = \frac{\varrho}{2}$; d. h. in unserem Falle, wo $\varphi_2(x)$ nach ganzen Potenzen von x^ϱ fortschreitet, *muss* $\mathfrak{F}(x)$ *nach ganzen Potenzen von* $\frac{\varrho}{2}$ *fortschreiten*, weil $\mathfrak{p}_0$ lauter ganze Potenzen von x^ϱ besitzt.

e) Was nun $\varphi_1(x)$ betrifft, so überlegen wir Folgendes. Es sei das Anfangsglied der nullten Partialfunction

$$a_{\pm 3\mu}\, x^{\pm 3\mu},$$

so werden die Anfangsglieder von

$$(w) \qquad p_{\pm 3\mu} \cdot p^3_{\pm\varepsilon}, \quad p_{\pm 3\mu} \cdot p^3_{\pm\varepsilon+1}, \quad p_{\pm 3\mu} \cdot p^3_{\pm\varepsilon+2};$$
$$p_{\pm 3\mu} \cdot p_{\pm\varepsilon} \cdot p_{\pm\varepsilon+1} \cdot p_{\pm\varepsilon+2}$$

beziehungsweise die Exponenten besitzen:

$$\pm 3(\mu + \varepsilon), \quad \pm 3(\mu + \varepsilon) + 3, \quad \pm 3(\mu + \varepsilon) + 6;$$
$$\pm 3(\mu + \varepsilon) + 3.$$

Es sind nun dann folgende drei Fälle zu unterscheiden: ob nämlich

$$\varepsilon \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$$

ist.

1) Ist ε durch drei theilbar, so ist offenbar ε mit 3μ identisch und die obigen Glieder haben dann die Anfangsexponenten respective

$$\pm 4\varepsilon, \quad \pm 4\varepsilon + 3, \quad \pm 4\varepsilon + 6; \quad \pm 4\varepsilon + 3.$$

Dabei tritt wiederum der grösste negative oder kleinste positive Exponent nur ein einziges Mal auf. — Die Hinzufügung von

$$-9(p_0^2 - p_1 p_2)(2p_0^2 + p_1 p_2) = -18 p_0^4 + 9 p_0^2 p_1 p_2 + 9 p_1^2 p_2^2$$

schafft nur das eine neue Glied

$$9 p_1^2 p_2^2.$$

(Indem die ersten zwei, mit einem gewissen Zahlencoefficienten behaftet, schon in jenen Gliedern vorhanden waren und ihr neues Hinzutreten nur diese Zahlencoefficienten ändern können, und für unseren Zweck kann es höchstens von Interesse sein nachzusehen, ob nicht der betreffende Zahlencoefficient Null wird; nun waren früher die Zahlencoefficienten dieser zwei Glieder

$$(+1), \text{ resp. } (-3)$$

und durch Hinzutreten von

$$(-18), \text{ resp. } (+9)$$

verwandeln sie sich in

$$(-17), \text{ resp. } (+6)$$

also, wie vorhin, von Null verschieden.)

Das einzige Glied, welches noch auf die obige Betrachtung von Einfluss sein kann, hat aber den Anfangsexponenten $\pm 4\varepsilon + 6$, so dass durch das Hinzutreten desselben unsere obige Behauptung durchaus nicht alterirt wird.

2) Ist nun $\pm\varepsilon \equiv 1 \pmod{3}$, so ist $\pm 3\mu = \pm\varepsilon + 2$, so dass die obigen Glieder (w) respective die Anfangsexponenten

$$\pm 4\varepsilon + 2, \quad \pm 4\varepsilon + 5, \quad \pm 4\varepsilon + 8; \quad \pm 4\varepsilon + 5$$

besitzen, und durch Hinzufügung von

$$9 p_1^2 p_2^2$$

würde noch ein Anfangsglied mit dem Exponenten

$$\pm 4\varepsilon + 2$$

hinzutreten, so dass die obige Behauptung für die Summe

der Glieder (w) d. h. für die ganze Summe, welche $(-\varphi_1(x))$ repräsentirt, nicht mehr richtig ist.

3) Ist dagegen $\pm\varepsilon \equiv 2 \pmod{3}$, also $\pm 3\mu = \pm\varepsilon + 1$, so haben jene Glieder die Exponenten beziehungsweise

$$\pm 4\varepsilon + 1, \quad \pm 4\varepsilon + 4, \quad \pm 4\varepsilon + 7; \quad \pm 4\varepsilon + 4,$$

und das hinzutretende Glied

$$9 p_1^2 p_2^2$$

liefert dann noch ein Glied mit dem Exponenten $\pm 4\varepsilon + 4$, so dass in diesem Falle die obige Behauptung für die Glieder (w) wiederum wie im Falle (1) auch für $\varphi_1(x)$ richtig bleibt. So dass wir aussagen können:

in dem Producte

$$p_0 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix}$$

tritt der grösste negative oder kleinste positive Exponent unter allen Umständen nur ein einziges Mal auf; für die ganze Summe $\varphi_1(x)$ gilt dagegen diese Behauptung nur für die Fälle

$$\pm\varepsilon \equiv 0 \pmod{3}, \quad \pm\varepsilon \equiv 2 \pmod{3},$$

in dem Falle aber, wo

$$\pm\varepsilon \equiv 1 \pmod{3}$$

ist, besteht der Coefficient des Gliedes mit dem grössten negativen oder kleinsten positiven Exponenten aus einer Summe zweier Glieder, es ist nämlich:

$$(3 a_{\pm\varepsilon}^3 \cdot a_{\pm\varepsilon+2} + 9 a_{\pm\varepsilon}^2 \cdot a_{\pm\varepsilon+1}^2)\, x^{\pm 4\varepsilon + 2}.$$

In diesem letzteren Falle ist es wohl möglich, dass die Hauptfunction negative Exponenten besitzen soll, während $\varphi_1(x)$ keine besässe; nämlich, wenn $a_{\pm\varepsilon}$ von Null verschieden ist, während die Bedingungsgleichung

$$a_{\pm\varepsilon} a_{\pm\varepsilon+2} + 3 a_{\pm\varepsilon+1}^2 = 0$$

befriedigt wird. Nicht aber umgekehrt.

Um noch einzusehen, inwiefern nun die speciellere Beschaffenheit der Coefficienten noch von der näheren Be-

stimmung derjenigen von $\varphi_1(x)$ abhängt und inwiefern diese Abhängigkeit nicht etwa in Widerspruch stünde mit den Annahmen über die anderen $\varphi(x)$, ist es noch nöthig die Entscheidung zu treffen, ob die Hauptfunction eine vollständige, oder sie selbst schon eine gewisse i_1^{te} Partialfunction n_1^{ter} Classe sei. *Diese Frage lässt sich immer durch die zu befriedigenden Congruenzen genau beantworten.* In unserem Falle, wo wir annehmen, dass $\varphi_2(x)$ nach x^ϱ und somit $f(x)$ nach $x^{\frac{\varrho}{3}}$ und $\mathfrak{F}(x)$ nach $x^{\frac{\varrho}{2}}$ fortschreiten müssen, wird es uns am bequemsten sein, die nähere Bestimmung von i_1 und n_1 durch die für $\varphi_0(x)$ anzugeben.

f) Nehmen wir an, es sei $\varphi_0(x)$ eine nullte Partialfunction 5ter Classe einer Hauptfunction mit ganzzahligen Exponenten, so wird, falls z. B.

$$\mathfrak{a}_{\frac{\varepsilon\varrho}{2}} x^{\frac{\varepsilon\varrho}{2}} \text{ das erste Glied in } \mathfrak{F}(x)$$

$$\alpha_{0,5\eta} x^{5\eta} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \varphi_0(x)$$

ist und ausserdem die obige Annahme bestehen soll, dass

$$5\lambda_{2,\varrho} x^\varrho \text{ das erste Glied in } \varphi_2(x)$$

und somit

$$(5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{1}{3}} x^{\frac{\varrho}{3}} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad f(x)$$

das Product $(\mathfrak{F}(x) \cdot \mathfrak{F}(-x))(f(x) \cdot f(r_3 x) \cdot f(r_3^2 x))$ offenbar das erste Glied

$$\mathfrak{a}^2_{\frac{\varepsilon\varrho}{2}} \cdot 5\lambda_{2,\varrho}\, x^{\varrho(1+\varepsilon)}$$

besitzen und es entsteht somit die Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{a}^2_{\frac{\varepsilon\varrho}{2}} \cdot 5\lambda_{2,\varrho} x^{\varrho(1+\varepsilon)} = \alpha_{0,5\eta} x^{5\eta},$$

woraus die Bestimmungen

$$\varepsilon = \frac{5\eta - \varrho}{\varrho}; \quad \mathfrak{a}^2_{\frac{\varepsilon\varrho}{2}} = \frac{\alpha_{0,5\eta}}{5\lambda_{2,\varrho}}$$

sich ergeben.

Für den speciellen Fall z. B.

$$z^5 + 5\lambda_{2,\varrho} x^\varrho \cdot z^2 + \mu_{0,0} = 0$$

ist einfacher:

$$\eta = 0; \quad \varepsilon = -1; \quad \mathfrak{a}^2_{-\frac{\varrho}{2}} = \frac{\lambda_{0,0}}{5\lambda_{2,\varrho}}.$$

Durch ganz analoge Schlüsse wie oben folgert man, dass dann $\mathfrak{F}(x)$ selbst eine Partialfunction 5[ter] Classe einer Hauptfunction von $x^{\frac{\varrho}{2}}$ und $f(x)$ eine solche einer Hauptfunction von $x^{\frac{\varrho}{3}}$ sein müssen; also hat man nach Berücksichtigung der obigen Resultate:

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{a}_{-\frac{\varrho}{2}} x^{-\frac{\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{6\varrho}{2}} x^{-\frac{6\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{11\varrho}{2}} x^{-\frac{11\varrho}{2}} + \cdots,$$

$$f(x) = a_{\frac{\varrho}{3}} x^{\frac{\varrho}{3}} + a_{-\frac{4\varrho}{3}} x^{-\frac{4\varrho}{3}} + a_{-\frac{9\varrho}{3}} x^{-\frac{9\varrho}{3}} + \cdots.$$

Setzt man die daraus folgenden Werthe für

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{a}_{-3\varrho} x^{-3\varrho} + \mathfrak{a}_{-8\varrho} x^{-8\varrho} + \mathfrak{a}_{-13\varrho} x^{-13\varrho} + \cdots,$$

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_{-\frac{\varrho}{2}} x^{-\frac{\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{11\varrho}{2}} x^{-\frac{11\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{21\varrho}{2}} x^{-\frac{21\varrho}{2}} + \cdots,$$

und

$$p_0 = a_{-3\varrho} x^{-3\varrho} + a_{-8\varrho} x^{-8\varrho} + a_{-13\varrho} x^{-13\varrho} + \cdots,$$

$$p_1 = a_{\frac{\varrho}{3}} x^{\frac{\varrho}{3}} + a_{-\frac{14\varrho}{3}} x^{-\frac{14\varrho}{3}} + a_{-\frac{29\varrho}{3}} x^{-\frac{29\varrho}{3}} + \cdots,$$

$$p_2 = a_{-\frac{4\varrho}{3}} x^{-\frac{4\varrho}{3}} + a_{-\frac{19\varrho}{3}} x^{-\frac{19\varrho}{3}} + a_{-\frac{34\varrho}{3}} x^{-\frac{34\varrho}{3}} + \cdots,$$

in die Gleichungen (0′), (1′), (2′), (3′), (4′) ein, indem man zugleich die speciellen Werthe

$$\varphi_0(x) = \lambda_{0,0}, \quad \varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 5\lambda_{2,\varrho} x^{\varrho}$$

berücksichtigt, so erhält man, wenn man der Einfachheit wegen in p_0, p_1, p_2 zunächst $x^{\frac{\varrho}{3}} = y$; $a_{\frac{\varrho}{3}} = b_1$ und allgemein $a_{\pm p\frac{\varrho}{3}} = b_{\pm p}$ für einen Augenblick setzt und auf die Indices symbolisch die entsprechenden Operationen wie auf Exponenten ausübt:

$$
\begin{aligned}
(0')\quad 0 = (3b_1^4 b_{-4} + \lambda_{0,0}) &+ 3\left.\begin{pmatrix} b_1^4 b_{-19} + 4b_1^3 b_{-4} b_{-14} \\ + 2b_1^3 b_{-9}^2 \\ - 3b_1^2 b_{-4}^2 b_{-9} + b_1 b_{-4}^4 \end{pmatrix}\right| y^{-15} + \\
&+ 3\left[\begin{matrix} b_1^4 b_{-34} + 4b_1^3 b_{-4} b_{-29} \\ + (4b_1^3 b_{-9} - 3b_1^2 b_{-4}^2)\, b_{-24} \\ + b_1(4b_1^2 b_{-14} - 6b_1 b_{-4} b_{-9} + 4b_{-4}^3)\, b_{-19} \\ + 6b_1^2 b_{-4} b_{-14}^2 + 6b_1 b_{-9}(b_1 b_{-9} - b_{-4}^2) b_{-14} \\ + b_{-4}^4 b_{-14} - 5b_1 b_{-4} b_{-9}^3 + 2b_{-4}^3 b_{-9}^2 \end{matrix}\right]\Bigg| y^{-30} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1')\quad 0 = (b_1^3 b_{-9} + 3b_1^2 b_{-4}^2) &+ \left.\begin{matrix} (b_1^3 b_{-24} + 6b_1^2 b_{-4} b_{-19} \\ + b_{-4}^3 b_{-9} + 3b_1^2 b_{-9} b_{-14}) \\ + 6b_1 b_{-4}^2 b_{-14} \end{matrix}\right| y^{-15} + \\
&+ \left.\begin{matrix} [b_1^3 b_{-39} + 6b_1^2 b_{-4} b_{-34} \\ + 3b_1 (b_1 b_{-9} + 2b_{-4}^2) b_{-29} \\ + (b_{-4}^3 + 3b_1 (b_1 b_{-14} - 2b_{-4} b_{-9}))\, b_{-24} \\ + 3(b_{-4}^2 b_{-9} + b_1(b_1 b_{-19} + 4b_{-4} b_{-14}))\, b_{-19} \\ + 3(b_{-4}^2 + b_1 b_{-9}) b_{-14}^2 - 5b_{-9}^4] \end{matrix}\right| y^{-30} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2')\quad 0 = (b_1^3 + 5\lambda_{0,\varrho}) &+ (3b_1^2 b_{-14} + 15\, b_1 b_{-4} b_{-9} + b_{-4}^3)\, y^{-15} \\
&+ \left.\begin{matrix} 3b_1^2 b_{-29} + 15\, b_1 b_{-4} b_{-24} \\ + 3(b_{-4}^2 + 5b_1 b_{-9}) b_{-19} + 3b_1 b_{-14}^2 \\ + 15\, b_{-4} b_{-9} b_{-14} + 10\, b_{-9}^3 \end{matrix}\right| y^{-30} + \cdots.
\end{aligned}
$$

(Dabei ist die Gleichung (1′) durch $3y^{-6}$ und (2′) durch y^3 dividirt worden.)

Aus den Coefficienten von y^0 erhält man nun

$$
\text{in } (2')\ b_1^3 = -5\lambda_{2,\varrho}; \quad \text{in } (0')\ b_{-4} = \frac{\lambda_{0,0}}{3b_1^4};
$$

$$
\text{in } (1')\ b_{-9} = -\frac{3b_{-4}^2}{b_1},
$$

dann für die drei Grössen der zweiten Gruppe aus den Coefficienten von y^{-15}

$$\text{in } (2')\ b_{-14} = +\frac{44}{3}\frac{b_{-4}^3}{b_1^2};\quad \text{in } (0')\ b_{-19} = -\frac{260}{3}\frac{b_{-4}^4}{b_1^3};$$

$$\text{in } (1')\ b_{-24} = +\frac{1701}{3}\frac{b_{-4}^5}{b_1^4}.$$

Ebenso für die Grössen der dritten Gruppe aus den Coefficienten von y^{-30}

$$\text{in } (2')\ b_{-29} = -\frac{35581}{3^2}\frac{b_{-4}^6}{b_1^5};\quad \text{in } (0')\ b_{-34} = +\frac{259160}{3^2}\frac{b_{-4}^7}{b_1^6};$$

$$\text{in } (1')\ b_{-39} = -\frac{1948617}{3^2}\frac{b_{-4}^8}{b_1^7}\ \text{etc. etc.}$$

(Durch eine Bemerkung über die Bildungsweise der Partialfunctionen dieser Functionen werden wir noch später ein viel leichteres Mittel finden, diese Zahlen zu berechnen.)

Der allgemeine Zahlencoefficient hat die Form

$$N'_{-5q+1} = (-1)^{q-1}\frac{\prod\limits_{1}^{q-1}\lambda\,(5q-1-3\lambda)}{q!} = \frac{\prod\limits_{1}^{q-1}\lambda\,(-5q+1+3\lambda)}{q!}.$$

Auch hier wächst die Anzahl der Factoren mit q bis in's Unendliche; indess erspart man durch das Princip der Cofunctionen es vollkommen, die Untersuchung des Grenzwerthes auf die Ausdrücke der Gauss'schen Π oder der Γ oder der Weierstrass'schen Factoriellen zurückzuführen (vergl. die in Cap. II, § 6, pag. 59 angeführten Abhandlungen von Westphal, Gebhard und Mangoldt), indem der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder der **Partialfunctionen** 3ter **Classe** in unserem Falle nie mehr als *fünf* nach q lineare Factoren im Zähler und ebensoviel im Nenner besitzt; und zwar für $q > 5$ immer in der Form

$$\frac{N'_{-5q-14}}{N'_{-5q+1}} = \frac{(-5q+1)(-5q-2)(-5q-5)(-5q-8)(-5q-11)}{(q+1)(q+2)(q+3)\times(-2q-5)(-2q-2)}$$

$$= \frac{\left(-5+\frac{1}{q}\right)\left(-5-\frac{2}{q}\right)\left(-5-\frac{5}{q}\right)\left(-5-\frac{8}{q}\right)\left(-5-\frac{11}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{q}\right)\times\left(-2-\frac{5}{q}\right)\left(-2-\frac{2}{q}\right)},$$

so dass der Grenzwerth sich von selbst ergiebt:

$$\lim_{q=\infty}\frac{N'_{-5q-14}}{N'_{-5q+1}} = \frac{(-5)^5}{(-2)^2}.$$

Die Reihe ist also convergent für

$$\text{Mod.}\,\frac{(-5)^5}{(-2)^2}\,\frac{b^3_{-4}}{b_1^{\,3}}\,y^{-15} < 1, \quad \text{oder} \quad \text{Mod.}\,\frac{2^2 b_1^{\,3}}{(-5^5 b^3_{-4}}\,y^{15} > 1,$$

oder auch, wenn man für y und b die Werthe wieder einsetzt,

$$\text{Mod.}\,\frac{2^2 a^3_{\frac{\varrho}{3}}}{(-5)^5 a^3_{\frac{-4\varrho}{8}}}\,x^{5\varrho} > 1; \quad \text{Mod.}\,\frac{2^2 3^3 (-5\lambda_{2,\varrho})^5}{(-5)^5 \lambda^3_{0,0}}\,x^{5\varrho} > 1\,.$$

Hat man eine Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_2 z^2 + A_0 = 0,$$

so braucht man nur in der Reihe sowohl, wie in der angegebenen Convergenzbedingung derselben die Werthe

$$5\lambda_{2,\varrho}\,x^\varrho = A_2; \qquad \lambda_{0,0} = A_0$$

zu berücksichtigen, um durch die drei circumplexen Functionen dritter Classe der Reihe $f(x)$ drei Wurzeln der gegebenen Gleichung für beliebige Werthe von x innerhalb des genannten Convergenzkreises zu erhalten, *so lange* die Bedingung

$$\text{Mod.}\,(-2)^2\,\frac{\left(\frac{-A_2}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{3}\right)^3} > 1$$

erfüllt ist.

Diese Bedingung ist aber genau die entgegengesetzte von derjenigen, welche wir für dieselbe Gleichung

$$z^5 + A_2 z^2 + A_0 = 0$$

in § 17, a gefunden haben, damit die fünf Wurzeln durch die fünf circumplexen Functionen der dort angegebenen Potenzreihe, welche *genau ausserhalb* unseres Convergenzkreises in der ganzen Ebene convergirt, repräsentirt werden. Die beiden Reihen sind also als complementär zu einander aufzufassen, indem sie zusammen die Wurzeln einer und derselben Gleichung repräsentiren; die eine innerhalb eines gewissen Kreises und die andere ausserhalb desselben.

Bemerkt man noch, dass auf der Peripherie des genannten Kreises beide Potenzreihen mit Ausnahme gewisser Punkte

convergiren, so wäre die Auflösung unserer Hauptaufgabe für diese specielle trinomische Gleichung 5ten Grades für die ganze Ebene vollkommen geleistet; denn die noch fehlenden zwei Wurzeln erforderten nur noch die Auflösung einer quadratischen Gleichung, die wir bereits in § 12 durchgeführt haben. Indess ist es schon aus der obigen Andeutung klar, dass es ebenso leicht ist, die complementäre Reihe für die zwei noch fehlenden Wurzeln in unserer $\mathfrak{F}(x)$ zu erkennen, respective die Coefficienten derselben genau zu bestimmen.

g) Setzt man ferner die oben gefundene Form von $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_1$, nämlich:

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{a}_{-3\varrho} x^{-3\varrho} + \mathfrak{a}_{-8\varrho} x^{-8\varrho} + \mathfrak{a}_{-13\varrho} x^{-13\varrho} + \cdots,$$

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_{-\frac{\varrho}{2}} x^{-\frac{\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{11\varrho}{2}} x^{-\frac{11\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{21\varrho}{2}} x^{-\frac{21\varrho}{2}} + \cdots$$

und zugleich die nunmehr genau bestimmten Werthe von p_0, p_1, p_2, welche übrigens in ihrer natürlichen Reihenfolge, ihrer Beschaffenheit nach, p_1, p_2, p_0 geschrieben werden müssen, nämlich:

$$p_1 = (-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{1}{3}} x^{\frac{\varrho}{3}} + \frac{44}{3^4} \cdot \frac{\lambda_{0,0}^3}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{14}{3}}} x^{-\frac{14\varrho}{3}} - \frac{35581}{3^8} \frac{\lambda_{0,0}^6}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{29}{3}}} x^{-\frac{29\varrho}{3}} + \cdots,$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \frac{\lambda_{0,0}}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{4}{3}}} x^{-\frac{4\varrho}{3}} - \frac{260}{3^5} \frac{\lambda_{0,0}^4}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{19}{3}}} x^{-\frac{19\varrho}{3}} + \frac{259160}{3^9} \frac{\lambda_{0,0}^7}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{34}{3}}} x^{-\frac{34\varrho}{3}} + \cdots,$$

$$p_0 = -\frac{1}{3} \frac{\lambda_{0,0}^2}{(-5\lambda_{2,\varrho})^3} x^{-3\varrho} + \frac{1701}{3^5} \frac{\lambda_{0,0}^5}{(-5\lambda_{2,\varrho})^8} x^{-8\varrho} - \frac{1948617}{3^{10}} \frac{\lambda_{0,0}^8}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{13}} x^{-13\varrho} + \cdots$$

in die obigen Bedingungsgleichungen

$$(4') \qquad \mathfrak{p}_0 = -\frac{3}{2} p_0,$$

$$(3') \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_0 \end{vmatrix} - 6p_0^2 - 3p_1p_2 = 0; \quad 4\mathfrak{p}_1^2 + 15p_0^2 + 12p_1p_2 = 0$$

ein, so erhält man aus (4′) direct:

$$\mathfrak{p}_0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_{0,0}^2}{(-5\lambda_{2,\varrho})^3}x^{-3\varrho} - \frac{1701}{2\cdot 3^5}\frac{\lambda_{0,0}^5}{(-5\lambda_{2,\varrho})^8}x^{-8\varrho} + \frac{1948617}{2\cdot 3^9}\frac{\lambda_{0,0}^8}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{13}}x^{-13\varrho} - \cdots.$$

Man kann übrigens p_0 sowohl, als auch $\mathfrak{p}_0$ in einfacherer Form schreiben, wenn man in der obigen allgemeinen Gestalt des Zahlencoefficienten

$$N'_{-5q+1} = \frac{\prod\limits_{1}^{q-1}{}^{\lambda}(-5q+1+\lambda\cdot 3)}{q!}$$

bemerkt, dass für den Fall der nullten Partialfunction 3ter Classe, wo also

$$-5q + 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 3)$$

der Zahlencoefficient eben jedesmal eine gewisse Potenz von 3 als Factor enthält*). Es wird dann einfacher:

$$p_0 = -\frac{1}{3}\frac{\lambda_{0,0}^2}{(-5\lambda_{2,\varrho})^3}x^{-3\varrho} + \frac{7}{3}\frac{\lambda_{0,0}^5}{(-5\lambda_{2,\varrho})^8}x^{-8\varrho} - 11\cdot 3\frac{\lambda_{0,0}^8}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{13}}x^{-13\varrho} + \cdots$$

und

$$\mathfrak{p}_0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_{0,0}^2}{(-5\lambda_{2,\varrho})^3}x^{-3\varrho} - \frac{7}{2}\frac{\lambda_{0,0}^5}{(-5\lambda_{2,\varrho})^8}x^{-8\varrho} + \frac{11\cdot 3^2}{2}\frac{\lambda_{0,0}^8}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{13}}x^{-13\varrho} - \cdots.$$

---

*) In den obigen Fällen, wo wir die Partialfunctionen 5ter Classe hatten, waren die Coefficienten der nullten Partialfunction durch gewisse Potenzen von 5 theilbar, aber in gewissen Fällen waren sie mit einem Factor Null behaftet. Hier aber kann kein einziger der Coefficienten Null sein, weil die einzelnen Factoren mit dem negativen Werth $(-5q+4)$ beginnen und successive immer um 3 zunehmend schliesslich den immer noch negativen Werth $(-2q-2)$ erreichen, ohne dass also einer von ihnen Null werden konnte.

Um $\mathfrak{p}_1$ zu erhalten, braucht man nur noch die Werthe in

$$4\mathfrak{p}_1^2 + 15p_0^2 + 12p_1p_2 = 0$$

einzusetzen; aus der durch $x^{-\varrho}$ dividirten Gleichung

$$0 = \left(\mathfrak{a}^2_{-\frac{\varrho}{2}} + \frac{\lambda_{0,0}}{-5\lambda_{2,\varrho}}\right) + \left(8\mathfrak{a}_{-\frac{\varrho}{2}}\mathfrak{a}_{-11\varrho} - 9\frac{\lambda_{0,0}^4}{(-5\lambda_{2,\varrho})^6}\right)x^{-5\varrho}$$

$$+ \left(8\mathfrak{a}_{-\frac{\varrho}{2}}\mathfrak{a}_{\frac{-21\varrho}{2}} + 4\mathfrak{a}_{\frac{-11\varrho}{2}} - 106\frac{\lambda_{0,0}^7}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{11}}\right)x^{-10\varrho} + \cdots$$

ergeben sich successive die Werthe

$$\mathfrak{a}^2_{\frac{-\varrho}{2}} = -\frac{\lambda_{0,0}}{-5\lambda_{2,\varrho}};\quad \mathfrak{a}_{\frac{-11\varrho}{2}} = \frac{3^2}{2^3}\frac{\lambda_{0,0}^{\frac{7}{2}}}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{11}{2}}};$$

$$\mathfrak{a}_{\frac{-21\varrho}{2}} = -\frac{1615}{2^7}\frac{\lambda_{0,0}^{\frac{13}{2}}}{(-5\lambda_{2,\varrho})^{\frac{21}{2}}};$$

etc. etc. Der allgemeine Zahlencoefficient hat die Form

$$N''_{-\frac{5q+1}{2}} = \frac{\prod_{\lambda=1}^{q-1}(-5q-1+2\lambda)}{q!\,2^q},$$

so dass der Quotient zweier aufeinander folgenden Zahlencoefficienten einer *Partialfunction zweiter* Classe derselben aus einem endlichen Producte von 5 Factoren im Zähler und ebensoviel im Nenner besteht

$$\frac{N''_{-5q-11}}{N'_{-5q-1}} = \frac{(-5q-9)(-5q-7)(-5q-5)(-5q-3)(-5q-1)}{2^2(q+1)(q+2)\times(-3q-7)(-3q-5)(-3q-3)}$$

$$= \frac{\left(-5-\frac{9}{q}\right)\left(-5-\frac{7}{q}\right)\left(-5-\frac{5}{q}\right)\left(-5-\frac{3}{q}\right)\left(-5-\frac{1}{q}\right)}{2^2\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\times\left(-3-\frac{7}{q}\right)\left(-3-\frac{5}{q}\right)\left(-3-\frac{3}{q}\right)}$$

und somit

$$\lim_{q=\infty}\frac{N''_{-5q-11}}{N''_{-5q-1}} = \frac{1}{2^2}\frac{(-5)^5}{(-3)^3},$$

also ist die Reihe convergent für

$$\text{Mod.}\left(\frac{1}{2^2}\frac{(-5)^5}{(-3)^3}\frac{\lambda_{0,0}^3}{(-5\lambda_{2,\varrho}x^\varrho)^5}\right) < 1,$$

$$\text{Mod. } 2^2\left(\frac{\left(\frac{5\lambda_{2,\varrho}x^\varrho}{5}\right)^5}{\left(\frac{\lambda_{0,0}}{3}\right)^3}\right) > 1,$$

also für $\mathfrak{F}(x)$, genau übereinstimmend mit der Bedingung für $f(x)$, wiederum die entgegengesetzte Convergenzbedingung von der, welche wir oben in § 17, a für die Reihe, welche die fünf Wurzeln derselben Gleichung liefern sollte, gehabt haben.

Für eine Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_2 z^2 + A_0 = 0$$

hat man somit, wenn $5\lambda_{2,\varrho}x^\varrho = A_2$; $\lambda_{0,0} = A_0$ gesetzt wird, ebenfalls die complementäre Lösung für

$$\text{Mod. } 2^2\frac{\left(\frac{A_2}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{3}\right)^3} > 1.$$

Auf Grund der obigen Betrachtungen wird es von selbst einleuchten, dass in unserer Lösung zugleich die allgemeinen für die fünf speciellen Gleichungen des cyklischen Systems

$$z^5 + \varphi_{\iota,2}(x)z^2 + \varphi_{\iota,0}(x) = 0$$

enthalten sind, wenn man nur für ϱ die entsprechenden Werthe setzt.

Weil nun der erhaltene Grenzwerth und somit die Convergenzbedingung für die Gleichung mit constanten Coefficienten von ϱ unabhängig ist, so ist es selbstverständlich, dass alle fünf cyklischen Gleichungen immer die Lösung der Gleichung mit constanten Coefficienten innerhalb derselben Bedingungen eingeschlossen sind.

h) Indem wir nun bei derselben Aufgabe stehen bleiben, $f(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ so einzurichten, dass die erstere durch ihre drei circumplexen Functionen 3ter Classe drei Wurzeln und die letztere durch ihre zwei circumplexen Functionen zweiter Classe die übrigen zwei Wurzeln einer gegebenen Gleichung

fünften Grades repräsentiren, specialisiren wir diese Gleichung jetzt so, dass die Coefficienten die Werthe

$$\varphi_4(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 0; \quad \varphi_1(x) = 0$$

annehmen und nur

$$\varphi_3(x) = 5\mu_{3,\varrho} x^\varrho; \quad \varphi_0(x) = \mu_{0,0}$$

von Null verschieden sind.

Die fünf fundamentalen Bedingungsgleichungen werden jetzt lauten:

$$(4) \qquad 2\mathfrak{p}_0 + 3p_0 = 0,$$

$$(3) \qquad 4\mathfrak{p}_1^2 + 15p_0^2 + 12p_1p_2 + 20\mu_{3,\varrho}x^\varrho = 0,$$

oder auch

$$(3) \quad 4\mathfrak{p}_1^2 + (3p_0^2 + 6p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho) + 2(6p_0^2 + 3p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho) = 0$$

und

$$(2) \quad (p_0^3 + p_1^3 + p_2^3 - 3p_0p_1p_2) + 3p_0(3p_0^2 + 6p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho) = 0,$$

$$(1) \qquad 3p_0^2(3p_0^2 + 6p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho) + (p_0^2 - p_1p_2)(6p_0^2 + 3p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho) = 0,$$

$$(0) \quad 3p_0(3p_0^2 + 6p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho)(6p_0^2 + 3p_1p_2 + 5\mu_{3,\varrho}x^\varrho) = \mu_{0,0}.$$

(Wir haben diesmal diese Gleichungen in etwas anderer Form geschrieben, weil sich an dieselbe eine Bemerkung knüpfen lässt, die später gemacht werden soll.)

Die Ausrechnung liefert zunächst für (0), (1), (2), wenn man zunächst die in ganz analoger Weise wie oben sich ergebende Form

$$p_0 = a_{-2\varrho}\, x^{-2\varrho} + a_{-7\varrho}\, x^{-7\varrho} + a_{-12\varrho}\, x^{-12\varrho} + \cdots,$$

$$p_1 = a_{-\frac{11\varrho}{3}}\, x^{-\frac{11\varrho}{3}} + a_{-\frac{26\varrho}{3}}\, x^{-\frac{26\varrho}{3}} + a_{-\frac{41\varrho}{3}}\, x^{-\frac{41\varrho}{3}} + \cdots,$$

$$p_2 = a_{-\frac{\varrho}{3}}\, x^{-\frac{\varrho}{3}} + a_{-\frac{16\varrho}{3}}\, x^{-\frac{16\varrho}{3}} + a_{-\frac{31\varrho}{3}}\, x^{-\frac{31\varrho}{3}} + \cdots$$

und dann in (3) und (4)

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{a}_{-2\varrho}\, x^{-2\varrho} + \mathfrak{a}_{-7\varrho}\, x^{-7\varrho} + \mathfrak{a}_{-12\varrho}\, x^{-12\varrho} + \cdots,$$

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_{\frac{\varrho}{2}}\, x^{\frac{\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{9\varrho}{2}}\, x^{-\frac{9\varrho}{2}} + \mathfrak{a}_{-\frac{19\varrho}{2}}\, x^{-\frac{19\varrho}{2}} + \cdots$$

einsetzt, wieder

$$x^{-\frac{\varrho}{3}} = y^{-1}; \qquad a_{\frac{k\varrho}{3}} = b_k$$

substituirt und (2) durch y^{-3}, (1) durch y^{-9} dividirt:

$$(2)\quad 0 = (b_{-1}^3 + 5\mu_{3,\varrho}\cdot 3b_{-6}) + 3(b_{-1}^2 b_{-16} + b_{-21}\cdot 5\mu_{3,\varrho}) \Big| y^{-15} + \\ + 5b_{-6}(2b_{-6}^2 + 3b_{-1}b_{-11}) \Big|$$

$$+ 3(b_{-1}^2 b_{-31} + b_{-16}^2 b_{-1} + 10b_{-6}^2 b_{-21} + b_{-36}\cdot 5\mu_{3,\varrho}) \Big| y^{-30} + \cdots \\ + 15[b_{-6}(b_{-1}b_{-26} + b_{-11}b_{-16}) + b_{-1}b_{-11}b_{-21}] \Big| \\ + b_{-11}^3 \Big|$$

$$(1)\quad 0 = 5\mu_{3,\varrho}(4b_{-6}^2 - b_{-1}b_{-11}) \\ + 5\mu_{3,\varrho}(-b_{-1}b_{-26} + 8b_{-6}b_{-21} - b_{-11}b_{-16}) \Big| y^{-15} + \\ + 3(5b_{-6}^2(b_{-6}^2 + b_{-1}b_{-11}) - b_{-1}^2 b_{-11}^2) \Big|$$

$$+ 5\mu_{3,\varrho}(-b_{-1}b_{-41} + 8b_{-6}b_{-36} - b_{-11}b_{-31} \Big| y^{-30} + \cdots \\ + 4b_{-21}^2 - b_{-16}b_{-26}) \Big| \\ + 3[10b_{-6}b_{-21}(2b_{-6}^2 + b_{-1}b_{-11}) + (b_{-1}b_{-26} + b_{-11}b_{-16}) \Big| \\ \times (5b_{-6}^2 - 2b_{-1}b_{-11})] \Big|$$

$$(0)\quad 0 = [3b_{-6}(5\mu_{3,\varrho})^2 - \mu_{0,0}] + 5\mu_{3,\varrho}[3^3 b_{-6}(b_{-6}^2 + b_{-1}b_{-11}) \Big| y^{-15} + \\ + 3b_{-21}\cdot 5\mu_{3,\varrho}] \Big|$$

$$+ 5\mu_{3,\varrho}[3^3 b_{-6}(b_{-1}b_{-26} + 2b_{-6}b_{-21} + b_{-11}b_{-16}) \Big| y^{-30} + \cdots. \\ + 3^3 b_{-21}(b_{-6}^2 + b_{-1}b_{-11})] \Big| \\ + 3^3 b_{-6}[b_{-6}^2(2b_{-6}^2 + 5b_{-1}b_{-11}) + 2b_{-1}^2 b_{-11}^2] \Big| \\ + 3b_{-36}(5\mu_{3,\varrho})^2 \Big|$$

Man berechne zunächst die drei Grössen der ersten Gruppe aus den Coefficienten von y^0 und zwar

$$\text{in (0)}\ b_{-6} = \frac{\mu_{0,0}}{3(5\mu_{3,\varrho})^2}; \quad \text{in (2)}\ b_{-1}^3 = -\frac{\mu_{0,0}}{5\mu_{3,\varrho}};$$

$$\text{in (1)}\ b_{-11} = \frac{4b_{-6}^2}{b_{-1}}.$$

Hat man sich sodann die Werthe

$$b_{-1} b_{-11} = 4 b_{-6}^2,$$

$$5 \mu_{3,\varrho} = -\frac{b_{-1}^3}{3 b_{-6}}$$

gemerkt, so erhält man leicht die Grössen der zweiten Gruppe aus den Coefficienten von y^{-15}

$$\text{in (0) } b_{-21} = 5 \cdot 3^3 \frac{b_{-6}^4}{b_{-1}^3}; \qquad \text{in (2) } b_{-16} = \frac{5 \cdot 13}{3} \frac{b_{-6}^3}{b_{-1}^2};$$

$$\text{in (1) } b_{-26} = \frac{7 \cdot 17 \cdot 23}{3} \frac{b_{-6}^5}{b_{-1}^4},$$

dann aus den Coefficienten von y^{-30}

$$\text{in (0) } b_{-36} = 2 \cdot 11 \cdot 3^7 \frac{b_{-6}^7}{b_{-1}^6}; \quad \text{in (2) } b_{-31} = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19}{3^2} \frac{b_{-6}^6}{b_{-1}^5};$$

$$\text{in (1) } b_{-41} = \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29}{3^2} \frac{b_{-6}^8}{b_{-1}^7}$$

etc. etc. Das allgemeine Glied hat die Gestalt:

$$b_{-(5q+1)} = \frac{\prod_{\lambda=1}^{q-1} (5q + 1 - \lambda \cdot 3)}{q!} \frac{b_{-6}^q}{b_{-1}^{q-1}}.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder der Partialfunctionen dritter Classe besitzt wiederum eine endliche Anzahl, nämlich 5 nach q lineare Factoren im Zähler und im Nenner:

$$\frac{b_{-5q-16}}{b_{-5q-1}} = \frac{(5q+13)(5q+10)(5q+7)(5q+4)(5q+1)}{(q+1)(q+2)(q+3) \times (2q+1)(2q-2)}$$

$$= \frac{\left(5+\frac{13}{q}\right)\left(5+\frac{10}{q}\right)\left(5+\frac{7}{q}\right)\left(5+\frac{4}{q}\right)\left(5+\frac{1}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{q}\right) \times \left(2+\frac{1}{q}\right)\left(2-\frac{2}{q}\right)}; \ (q > 5).$$

Die Reihe ist also convergent für

$$\text{Mod.}\left(\frac{2^2}{5^5} \frac{b_{-1}^3}{b_{-6}^3} y^{15}\right) > 1; \quad \text{Mod.}\,(-3^3) \frac{\left(\frac{5 \mu_{3,\varrho} x^\varrho}{5}\right)^5}{\left(\frac{\mu_{0,0}}{2}\right)^2} > 1$$

und liefert somit für diesen Kreis drei Wurzeln der Gleichung.

i) Die übrigen zwei Wurzeln erhält man, indem man diese Werthe für

$$p_2 = \left(\frac{\mu_{0,0}}{-5\mu_{3,\varrho}}\right)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{\varrho}{3}} + \frac{5.13}{3^4} \frac{\mu_{0,0}^{\frac{7}{3}}}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{16}{3}}} x^{-16\frac{\varrho}{3}} + $$

$$+ \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19}{3^8} \frac{\mu_{0,0}^{\frac{13}{3}}}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{31}{3}}} x^{-31\frac{\varrho}{3}} + \cdots,$$

$$p_0 = \frac{1}{3} \frac{\mu_{0,0}}{(-5\mu_{3,\varrho})^2} x^{-2\varrho} + \frac{5}{3} \frac{\mu_{0,0}^3}{(-5\mu_{3,\varrho})^7} x^{-7\varrho} +$$

$$+ \quad 2 \cdot 11 \quad \frac{\mu_{0,0}^5}{(-5\mu_{3,\varrho})^{12}} x^{-12\varrho} + \cdots,$$

$$p_1 = \frac{4}{9} \frac{\mu_{0,0}^{\frac{5}{3}}}{(-5\mu_{3\varrho})^{\frac{11}{3}}} x^{-11\frac{\varrho}{3}} + \frac{7 \cdot 17 \cdot 23}{3^6} \frac{\mu_{0,0}^{\frac{11}{3}}}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{26}{3}}} x^{-26\frac{\varrho}{3}} +$$

$$+ \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29}{3^{10}} \frac{\mu_{0,0}^{\frac{17}{3}}}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{41}{3}}} x^{-41\frac{\varrho}{3}} + \cdots.$$

in

$$(4) \qquad 2\mathfrak{p}_0 + 3p_0 = 0$$

$$(3) \qquad 4\mathfrak{p}_1^2 + 15p_0^2 + 12p_1p_2 + 20\mu_{3,\varrho}x^\varrho = 0$$

einsetzt. Es ergiebt sich dann ausser

$$\mathfrak{p}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_{0,0}}{(-5\mu_{3,\varrho})^2} x^{-2\varrho} - \frac{5}{2} \frac{\mu_{0,0}^3}{(-5\mu_{3,\varrho})^7} x^{-7\varrho} -$$

$$- 3 \cdot 11 \frac{\mu_{0,0}^5}{(-5\mu_{3,\varrho})^{12}} x^{-12\varrho} - \cdots$$

noch die identische Bedingungsgleichung, welche nach Division durch x^ϱ die Gestalt annimmt:

$$(3')\ 0 = 4\left(\mathfrak{a}_{\frac{\varrho}{2}}^2 + 5\mu_{3,\varrho}\right) + \left(8\mathfrak{a}_{\frac{\varrho}{2}}\mathfrak{a}_{-\frac{9\varrho}{2}} + 7\frac{\mu_{0,0}^2}{(-5\mu_{3,\varrho})^4}\right)x^{-5\varrho}$$

$$+\left(8\mathfrak{a}_{\frac{\varrho}{2}}\mathfrak{a}_{-\frac{19\varrho}{2}} + 4\mathfrak{a}_{-\frac{9\varrho}{2}}^2 + 6\cdot 11\frac{\mu_{0,0}^4}{(-5\mu_{3,\varrho})^9}\right)x^{-10\varrho} + \cdots$$

Daraus ergiebt sich zunächst für die eine Grösse der ersten Gruppe aus den Coefficienten von x^0 in (3′)

$$\mathfrak{a}_{\frac{\varrho}{2}} = (-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{1}{2}},$$

dann aus dem Coefficienten von $x^{-5\varrho}$ der Werth für

$$\mathfrak{a}_{-9\frac{\varrho}{2}} = -\frac{7}{2^3}\frac{\mu_{0,0}^2}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{9}{2}}}$$

und somit aus dem Coefficienten von $x^{-10\varrho}$ für

$$\mathfrak{a}_{-19\frac{\varrho}{2}} = -\frac{5\cdot 13\cdot 17}{2^7}\frac{\mu_{0,0}^4}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{19}{2}}}$$

etc., und allgemein:

$$\mathfrak{a}_{-5q+1} = \frac{\prod_{\lambda=1}^{q-1}(-5q+1+2\lambda)}{q!\ 2^q}\frac{\mu_{0,0}^q}{(-5\mu_{3,\varrho})^{\frac{5q-1}{2}}}.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder einer Partialfunction zweiter Classe hat also wiederum die einfache Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{a}_{-5q-9}}{\mathfrak{a}_{-5q+1}} = \frac{\left(-5-\frac{7}{q}\right)\left(-5-\frac{5}{q}\right)\left(5-\frac{3}{q}\right)\left(-5-\frac{1}{q}\right)\left(-5+\frac{1}{q}\right)}{2^2\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\times\left(-3-\frac{5}{q}\right)\left(-3-\frac{3}{q}\right)\left(-3-\frac{1}{q}\right)}\frac{\mu_{0,0}^2}{(-5\mu_{3,\varrho})^5}.$$

Die Reihe $\mathfrak{F}(x)$ ist also convergent und liefert somit durch ihre zwei circumplexen Functionen zweiter Classe zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung für

$$\text{Mod.}(-3)^3 \frac{\left(\frac{5\mu_{3,\varrho}x^\varrho}{5}\right)^5}{\left(\frac{\mu_{0,0}}{2}\right)^2} > 1,$$

also unter derselben Bedingung, unter welcher die Reihe $f(x)$ die drei Wurzeln liefert.

Für eine Gleichung mit constanten Coefficienten

$$z^5 + A_3 z^3 + A_0 = 0,$$

heisst diese Bedingung wieder

$$\text{Mod.}(-3)^3 \frac{\left(\frac{A_3}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2} > 1,$$

also genau die entgegengesetzte von der, welche wir im § 17, (b) für dieselbe Gleichung gefunden haben, damit alle 5 Wurzeln durch die fünf circumplexen Functionen *einer* Hauptfunction, welche durch eine Potenzreihe mit ganzzahligen Exponenten repräsentirt wird, ausgedrückt werden.

B. *Eine Hauptfunction liefert eine Wurzel und die vier circumplexen Functionen einer andern Hauptfunction die übrigen vier Wurzeln.*

Es bleiben noch die zwei Fälle übrig von den vier am Anfang des § 17 angeführten Fällen einer trinomischen Gleichung, nämlich der dort mit (c) bezeichnete

$$z^5 + \varphi_{1,4}(x) \cdot z^4 + \varphi_{1,0}(x) = 0$$

und derjenige, welcher von Hermite, Kronecker und Brioschi für die Lösung mit Hilfe der Modularfunctionen der elliptischen Functionen gewählte Fall (d)

$$z^5 + \varphi_{1,1}(x) \cdot z + \varphi_{1,0}(x) = 0.$$

Für diese beiden Fälle soll noch die Lösung *ausserhalb* des Kreises um den Nullpunct, welcher bis zu den Verzweigungspuncten reicht (bei der trinomischen Gleichung liegen bekanntlich alle Verzweigungspuncte auf der Peripherie eines Kreises) geliefert werden. Es wird sich dabei zeigen, dass beide Fälle, in welchen die Exponenten des jeweiligen mittleren

Gliedes sich zu 5 ergänzen (z^4 und z^1) wiederum zusammengehören, wie wir das bereits bei den Fällen (a) und (b), wo das mittlere Glied jeweils z^2 und z^3 war, gesehen haben. Dort wurden beide gelöst, indem wir unsere ursprüngliche Aufgabe dahin abänderten, dass anstatt *einer* Hauptfunction *zwei* auftraten, von denen die eine zwei und die andere drei Wurzeln liefern sollten. Für die gegenwärtigen zwei Fälle modificiren wir in entsprechender Weise etwas anders unsere ursprüngliche

Aufgabe. Wie müssen die Coefficienten $\varphi(x)$ in der Gleichung

$$F(z, x) = z^5 + \varphi_4(x) z^4 + \varphi_3(x) z^3 + \varphi_2(x) z^2 + \\ + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0$$

beschaffen sein, damit *eine* Wurzel derselben durch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{a}_2 x^2 + \cdots + \mathfrak{a}_q x^q + \cdots$$

und die übrigen *vier* Wurzeln gleichzeitig durch die *vier* circumplexen Functionen *vierter* Classe von einer andern Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_q x^q + \cdots$$

für jeden Werth von x repräsentirt werden; respective wie müssen dabei $\mathfrak{F}(x)$ und $f(x)$ beschaffen sein? —

Auflösung. Ganz analog wie oben in § 18 A sieht man auch hier direct ein, dass mit Berücksichtigung der Relationen in § 14 die Bedingungsgleichungen bestehen werden:

$$(4) \qquad \mathfrak{F}(x) + 4p_0 = -\varphi_4(x),$$

$$(3) \qquad 4\begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_2 & p_0 \end{vmatrix} + 4\,\mathfrak{F}(x)\cdot p_0 = \varphi_3(x),$$

$$(2) \quad 4\begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_0 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + \mathfrak{F}(x)\left\{4\begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_2 & p_0 \end{vmatrix}\right\} = -\varphi_2(x),$$

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_3 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} + 4\,\mathfrak{F}(x)\begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_0 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} = \varphi_1(x);$$

$$(0) \qquad \mathfrak{F}(x)\begin{vmatrix} p_0 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_3 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{vmatrix} = - \varphi_0(x).$$

Für die Fälle, welche uns jetzt speciell interessiren, ist jedenfalls

$$\varphi_3(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 0,$$

und ausserdem noch in dem einen Falle (c)

$$\varphi_1(x) = 0$$

und in dem andern (d)

$$\varphi_4(x) = 0.$$

Nehmen wir nun den letzten Fall (d) an, so erhalten wir durch successive Substitution die Bedingungsgleichungen in der einfacheren Form:

$$(4) \quad 4p_0 + \mathfrak{F}(x) = 0,$$

$$(3) \quad p_2^2 + 2p_1p_3 + 5p_0^2 = 0,$$

$$(2) \quad p_2(p_1^2 + p_3^2) - 10p_0^3 = 0,$$

$$(1) \quad p_2^2(p_2^2 - 4p_1p_3) - (p_1^2 - p_3^2)^2 - 205p_0^4 = \varphi_1(x),$$

$$(0) \quad \mathfrak{F}(x)^5 + \varphi_1(x)\,\mathfrak{F}(x) + \varphi_0(x) = 0;$$

oder

$$(0') \quad 4^5p_0^5 + 4p_0\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = 0.$$

Nun kann man es allerdings so einrichten, dass auch nach dieser Methode die Wurzeln innerhalb jenes Kreises erscheinen, für welchen wir sie durch die 5 circumplexen Functionen *einer* Hauptfunction oben in § 15 bereits für alle cyklischen Gleichungen dargestellt haben. Würden wir z. B. für

$$d') \qquad z^5 + 5\alpha_{1,1}x \cdot z + \alpha_{0,0} = 0$$

annehmen, es sei $x = \xi^{-4}$ und

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_{-4}\xi^{-4} + \mathfrak{a}_{-8}\xi^{-8} + \mathfrak{a}_{-12}\xi^{-12} + \cdots,$$

so würde aus (0) folgen:

$$0 = (\mathfrak{a}_0^5 + \alpha_{0,0}) + 5\mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0^3\mathfrak{a}_{-4} + \alpha_{1,1})\xi^{-4} +$$
$$+ 5[\mathfrak{a}_0^3(2\mathfrak{a}_{-4}^2 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_{-8}) + \mathfrak{a}_{-4}\alpha_{1,1}]\xi^{-8} + \cdots,$$

woraus man successive die $\mathfrak{a}$ berechnen könnte:

$$\mathfrak{a}_0^5 + \alpha_{0,0} = 0; \; \mathfrak{a}_{-4} = -\frac{\alpha_{1,1}}{\mathfrak{a}_0^3}; \; \mathfrak{a}_{-8} = -\frac{\alpha_{1,1}^2}{\mathfrak{a}_0^7}; \; \mathfrak{a}_{-12} = -2\frac{\alpha_{1,1}^3}{\mathfrak{a}_0^{11}};$$

etc. Da wir aber ausserhalb jenes Kreises die Lösung wünschen, so wollen wir die Vorraussetzung machen (welche übrigens, genau wie in A. sich durch einfache Betrachtungen a priori bestimmen lässt), es seien

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{a}_{-1} x^{-1} + \mathfrak{a}_{-6} x^{-6} + \mathfrak{a}_{-11} x^{-11} + \mathfrak{a}_{-16} x^{-16} + \cdots,$$

$$f(x) = a_{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} + a_{-1} x^{-1} + a_{-\frac{9}{4}} x^{-\frac{9}{4}} + a_{-\frac{14}{4}} x^{-\frac{14}{4}} + \cdots,$$

also:

$$p_0 = a_{-1} x^{-1} + a_{-6} x^{-6} + a_{-11} x^{-11} + \cdots$$

$$p_1 = a_{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} + a_{-\frac{19}{4}} x^{-\frac{19}{4}} + a_{-\frac{39}{4}} x^{-\frac{39}{4}} + a_{-\frac{59}{4}} x^{-\frac{59}{4}} + \cdots$$

$$p_2 = a_{-\frac{14}{4}} x^{-\frac{14}{4}} + a_{-\frac{34}{4}} x^{-\frac{34}{4}} + a_{-\frac{54}{4}} x^{-\frac{54}{4}} + \cdots$$

$$p_3 = a_{-\frac{9}{4}} x^{-\frac{9}{4}} + a_{-\frac{29}{4}} x^{-\frac{29}{4}} + a_{-\frac{49}{4}} x^{-\frac{49}{4}} + \cdots.$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Bedingungsgleichungen ein, so erhält man die identischen Gleichungen:

$$(0') \quad 0 = (20 a_{-1} \alpha_{1,1} - \alpha_{0,0}) + 4(4^4 a_{-1}^5 + 5 a_{-6} \alpha_{1,1}) x^{-5}$$
$$+ 20(4^4 a_{-1}^4 a_{-6} + a_{-11} \alpha_{1,1}) x^{-10}$$
$$+ 20(2 \cdot 4^4 a_{-1}^3 a_{-6}^2 + 4^4 a_{-1}^4 a_{-11} + a_{-16} \alpha_{1,1}) x^{-15} + \cdots$$

$$(1) \quad 0 = \left(a_{\frac{1}{4}}^4 + 5 \alpha_{1,1}\right) + \left[4 a_{\frac{1}{4}}^3 a_{-\frac{19}{4}} - 2 a_{\frac{1}{4}}^2 a_{-\frac{9}{4}}^2 + 205 a_{-1}^4\right] x^{-5}$$
$$+ \left[4 a_{\frac{1}{4}}^3 a_{-\frac{39}{4}} - 4 a_{\frac{1}{4}}^2 a_{-\frac{9}{4}} a_{-\frac{29}{4}} + \left(2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{19}{4}} - a_{-\frac{9}{4}}^2\right)^2 + 2 a_{\frac{1}{4}}^2 a_{-\frac{19}{4}}^2 + 820 a_{-1}^3 a_{-6}\right] x^{-10} + \cdots$$

$$(2)\quad 0 = \left(a_{\frac{1}{4}}^2 a_{-\frac{14}{4}} - 10\, a_{-1}^3\right) + a_{\frac{1}{4}}^2 a_{-\frac{34}{4}} - 30\, a_{-1}^2 a_{-6} + a_{-\frac{14}{4}}\left(a_{-\frac{9}{4}}^2 + 2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{19}{4}}\right) \Bigg|\, x^{-5}$$

$$+ a_{\frac{1}{4}}^2 a_{-\frac{54}{4}} - 30\left(a_{-1} a_{-6}^2 + a_{-1}^2 a_{-11}\right) + a_{-\frac{14}{4}}\left(a_{-\frac{19}{4}}^2 + 2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{39}{4}}\right) + a_{-\frac{34}{4}}\left(a_{-\frac{9}{4}}^2 + 2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{19}{4}}\right) \Bigg|\, x^{-10} + \cdots$$

$$(3)\quad 0 = \left(5 a_{-1}^2 + 2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{9}{4}}\right) + \left(2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{29}{4}} + 2 a_{-\frac{19}{4}} a_{-\frac{9}{4}} + a_{-\frac{14}{4}}^2 + 10\, a_{-1} a_{-6}\right) \Bigg|\, x^{-5}$$

$$+ \left(2 a_{\frac{1}{4}} a_{-\frac{49}{4}} + 2 a_{-\frac{19}{4}} a_{-\frac{29}{4}} + 2 a_{-\frac{39}{4}} a_{-\frac{9}{4}} + 2 a_{-\frac{14}{4}} a_{-\frac{34}{4}} + 5 a_{-6}^2 + 10\, a_{-1} a_{-11}\right) \Bigg|\, x^{-10} + \cdots$$

Aus (0′) ergeben sich successive alle Coefficienten von p_0, nämlich:

$$a_{-1} = \frac{1}{4}\,\frac{\alpha_{0,0}}{5\alpha_{1,1}}; \qquad a_{-6} = -\frac{1}{4}\,\frac{\alpha_{0,0}^5}{(5\alpha_{1,1})^6};$$

$$a_{-11} = \frac{5}{4}\,\frac{\alpha_{0,0}^9}{(5\alpha_{1,1})^{11}}; \quad a_{-16} = -\frac{35}{4}\,\frac{\alpha_{0,0}^{13}}{(5\alpha_{1,1})^{16}};\ \text{etc.}$$

Somit ist die eine Function $\mathfrak{F}(x)$, welche eine Wurzel liefern soll, zugleich bestimmt, indem aus (4) die Werthe sich ergeben:

$$\mathfrak{a}_{-1} = -\frac{\alpha_{0,0}}{5\alpha_{1,1}}; \qquad \mathfrak{a}_{-6} = +\frac{\alpha_{0,0}^5}{(5\alpha_{1,1})^6};$$

$$\mathfrak{a}_{-11} = -5\frac{\alpha_{0,0}^9}{(5\alpha_{1,1})^{11}}; \quad \mathfrak{a}_{-16} = +35\frac{\alpha_{0,0}^3}{(5\alpha_{1,1})^{16}}; \text{ etc.}$$

Das allgemeine Glied hat die Form

$$\mathfrak{a}_{-5q-1}x^{-5q-1} = \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{q-1}(-5q-1+\lambda)}{q!}\frac{\alpha_{0,0}^{4q+1}}{(5\alpha_{1,1})^{5q+1}}x^{-5q-1}; \quad (q>1)$$

und der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder (diesmal einer Partialfunction *erster* Classe, also der Reihe selbst) besteht wiederum für $q > 5$ immer aus fünf nach q linearen Factoren im Zähler und im Nenner, so dass derselbe nach Division von Zähler und Nenner durch q^5 die Form hat:

$$\frac{\mathfrak{a}_{-5q-6}}{\mathfrak{a}_{-5q-1}}x^{-5} = \frac{\left(-5-\frac{5}{q}\right)\left(-5-\frac{4}{q}\right)\left(-5-\frac{3}{q}\right)\left(-5-\frac{2}{q}\right)\left(-5-\frac{1}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\times\left(-4-\frac{5}{q}\right)\left(-4-\frac{4}{q}\right)\left(-4-\frac{3}{q}\right)\left(-4-\frac{2}{q}\right)}\frac{\alpha_{0,0}^4}{(5\alpha_{1,1})^5}x^{-5}.$$

Die Reihe ist also convergent und liefert eine Wurzel der Gleichung, so lange

$$\text{Mod.}\,\frac{(-5)^5}{(-4)^4}\cdot\frac{\alpha_{0,0}^4}{(5\alpha_{1,1})^5}x^{-5} < 1; \quad \text{Mod.}\,\frac{\left(\frac{5\alpha_{1,1}x}{-5}\right)^5}{\left(\frac{\alpha_{0,0}}{4}\right)^4} > 1,$$

also für

$$z^5 + A_1 z + A_0 = 0,$$

so lange

$$\text{Mod.}\,\frac{\left(\frac{-A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} > 1$$

ist, also genau die entgegengesetzte Bedingung, von der in § 15.

Die noch fehlenden drei Partialfunctionen p_1, p_2, p_3 von $f(x)$ bestimmen sich aus den drei übrigen Gleichungen (1), (2), (3) und zwar wiederum zunächst die Grössen der ersten Gruppe aus den Coefficienten von x^0

$$\text{in (1)}\ a^4_{\frac{1}{4}} = -5\alpha_{1,1}; \quad \text{in (3)}\ a_{-\frac{9}{4}} = -\frac{5}{2}\frac{a^2_{-1}}{a_{\frac{1}{4}}};$$

$$\text{in 2)}\ a_{-\frac{14}{4}} = 10\frac{a^3_{-1}}{a^2_{\frac{1}{4}}},$$

dann aus den Coefficienten von x^{-5}

$$\text{in (1)}\ a_{-\frac{19}{4}} = -\frac{385}{8}\frac{a^4_{-1}}{a^3_{\frac{1}{4}}}; \quad \text{in (3)}\ a_{-\frac{29}{4}} = -\frac{23205}{16}\frac{a^6_{-1}}{a^5_{\frac{1}{4}}};$$

$$\text{in (2)}\ a_{-\frac{34}{4}} = +8580\frac{a^7_{-1}}{a^6_{\frac{1}{4}}} \text{ etc. etc.}$$

Das allgemeine Glied der Reihe hat die Form

$$a_{-\frac{5q-1}{4}}\, x^{-\frac{5q-1}{4}} = \frac{\prod_{1}^{q-1}{}^{\lambda}(-5q+1+\lambda\cdot 4)}{q!}\,\frac{a^q_{-1}}{a^{q-1}_{\frac{1}{4}}}\, x^{-\frac{5q-1}{4}},$$

und der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder in einer Partialfunction vierter Classe hat wiederum die einfache Form

$$\frac{a_{-\frac{5q+19}{4}}}{a_{-\frac{5q-1}{4}}}\, x^{-5}$$

$$= \frac{\left(-5-\frac{15}{q}\right)\left(-5-\frac{11}{q}\right)\left(-5-\frac{7}{q}\right)\left(-5-\frac{3}{q}\right)\left(-5+\frac{1}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{q}\right)\left(1+\frac{4}{q}\right)\times\left(-1-\frac{3}{q}\right)}\,\frac{a^4_{-1}}{a^4_{\frac{1}{4}}}\, x^{-5}; \ (q>5).$$

Die Reihe ist also convergent und liefert durch ihre vier circumplexen Functionen vierter Classe vier Wurzeln der gegebenen Gleichung wiederum für

$$\text{Mod.}\left(\frac{(-5)^5}{4^4}\,\frac{\alpha^4_{0,0}}{(5\,\alpha_{1,1})^5}\, x^{-5}\right) < 1; \quad \text{Mod.}\frac{\left(\frac{5\,\alpha_{1,1}\,x}{-5}\right)^5}{\left(\frac{\alpha^4_{0,0}}{4}\right)} > 1,$$

d. h. wiederum für

$$\text{Mod.}\,\frac{\left(-\frac{A_1}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} > 1,$$

was wir beweisen wollten.

Ganz analog ist der noch unberücksichtigt gebliebene Fall (c) zu behandeln.

Für

$$z^5 + \varphi_4(x)\,z^4 + \varphi_0(x) = 0, \tag{c}$$

wo also

$$\varphi_3(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 0; \quad \varphi_1(x) = 0,$$

verwandeln sich nämlich die obigen Gleichungen in

$$\mathfrak{F}(x) + 4p_0 + \varphi_4(x) = 0, \tag{4}$$

$$p_2^2 + 2p_1p_3 + p_0(2\varphi_4(x) + 5p_0) = 0, \tag{3}$$

$$p_2(p_1^2 + p_3^2) - p_0(\varphi_4(x)^2 + 6p_0\varphi_4(x) + 10p_0^2) = 0, \tag{2}$$

$$(p_2^2 - 2p_1p_3)^2 - (p_1^2 + p_3^2)^2 \tag{1}$$
$$- p_0(4\varphi_4(x)^3 + 44p_0\varphi_4(x)^2 + 164p_0^2\varphi_4(x) + 205p_0^3) = 0,$$

$$\mathfrak{F}(x)^5 + \varphi_4(x)\cdot\mathfrak{F}(x)^4 + \varphi_0(x) = 0 \tag{0}$$

(wobei die von p_0 unabhängigen Glieder mit den entsprechenden in dem soeben behandelten Falle d (pag. 213) vollkommen übereinstimmen).

In unserem speciellen Beispiele

$$\varphi_4(x) = 5\nu_{4,\varrho}x^\varrho; \quad \varphi_0(x) = \nu_{0,0}$$

folgt aus (0), wenn man

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{a}_\varrho x^\varrho + \mathfrak{a}_{-4\varrho}x^{-4\varrho} + \mathfrak{a}_{-9\varrho}x^{-9\varrho} + \mathfrak{a}_{-14\varrho}x^{-14\varrho} + \cdots$$

annimmt und im Resultate durch $x^{-5\varrho}$ dividirt:

$$\begin{aligned}0 = {} & \mathfrak{a}_\varrho^4(\mathfrak{a}_\varrho + 5\nu_{4,\varrho}) + [\mathfrak{a}_{-4\varrho}(\mathfrak{a}_\varrho + 4\nu_{4,\varrho})5\mathfrak{a}_\varrho^3 + \nu_{0,0}]x^{-5\varrho} \\ & + 5\mathfrak{a}_\varrho^2[\mathfrak{a}_{-9\varrho}(\mathfrak{a}_\varrho + 4\nu_{4,\varrho})\mathfrak{a}_\varrho + 2\mathfrak{a}_{-4\varrho}^2(\mathfrak{a}_\varrho + 3\nu_{4,\varrho})]x^{-10\varrho} + \\ & + 5\mathfrak{a}_\varrho[\mathfrak{a}_{-14\varrho}(\mathfrak{a}_\varrho + 4\nu_{4,\varrho})\mathfrak{a}_\varrho^2 + 2\mathfrak{a}_{-4\varrho}\{\mathfrak{a}_\varrho(\mathfrak{a}_{-4\varrho}^2 + 2\mathfrak{a}_\varrho\mathfrak{a}_{-9\varrho}) \\ & \qquad + 2\nu_{4,\varrho}(\mathfrak{a}_{-4\varrho}^2 + 3\mathfrak{a}_\varrho\mathfrak{a}_{-9\varrho})\}]x^{-15\varrho} + \cdots,\end{aligned}$$

und somit

$$\mathfrak{a}_\varrho = -5\nu_{4,\varrho}; \quad \mathfrak{a}_{-4\varrho} = \frac{\nu_{0,0}}{\mathfrak{a}_\varrho^4}; \quad \mathfrak{a}_{-9\varrho} = -4\,\frac{\nu_{0,0}^2}{\mathfrak{a}_\varrho^9};$$

$$\mathfrak{a}_{-14\varrho} = 26\,\frac{\nu_{0,0}^3}{\mathfrak{a}_\varrho^{14}};$$

etc. und allgemein

$$\mathfrak{a}_{-5q+1} = \frac{\prod_{1}^{q-1}\lambda \, (-5q+1+\lambda)}{q!} \cdot \frac{\nu_{0,0}^{q}}{\mathfrak{a}_{\varrho}^{5q-1}}; \quad (q>1).$$

Der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder der Partialfunction *erster* Classe, d. h. der Reihe selbst, hat die Form:

$$\frac{\mathfrak{a}_{-5q-4}}{\mathfrak{a}_{-5q+1}} = \frac{\left(-5-\frac{3}{q}\right)\left(-5-\frac{2}{q}\right)\left(-5-\frac{1}{q}\right)(-5)\left(-5+\frac{1}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\times\left(-4+\frac{3}{q}\right)\left(-4+\frac{2}{q}\right)\left(-4+\frac{1}{q}\right)(-4)}; \quad (q>5),$$

so dass die Reihe convergirt und *eine**) Wurzel der Gleichung liefert, so lange

$$\text{Mod.}\left(\frac{(-5)^5}{(-4)^4}\frac{\nu_{0,0}}{\mathfrak{a}_{\varrho}^{5}}x^{-5\varrho}\right) < 1; \quad \text{Mod.}\frac{\left(\frac{A_4}{5}\right)^5}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^4} > 1$$

ist, wenn die Gleichung in der Form

$$z^5 + 5\nu_{1,\varrho}x^{\varrho}\cdot z^4 + \nu_{0,0} = 0; \quad z^5 + A_4 z^4 + A_0 = 0$$

gegeben ist.

Damit ist auf Grund von (4) auch p_0 zugleich gegeben und convergirt innerhalb desselben Kreises. Setzt man nun

$$p_0 = -\frac{1}{4}\frac{\nu_{0,0}}{\mathfrak{a}_{\varrho}^{4}}x^{-4\varrho} + \frac{\nu_{0,0}^{2}}{\mathfrak{a}_{\varrho}^{9}}x^{-9\varrho} - \frac{26}{4}\frac{\nu_{0,0}^{3}}{\mathfrak{a}_{\varrho}^{14}}x^{-14\varrho} + \cdots,$$

$$p_1 = a_{-\frac{\varrho}{4}}x^{-\frac{\varrho}{4}} + a_{-\frac{21\varrho}{4}}x^{-\frac{21\varrho}{4}} + a_{-\frac{41\varrho}{4}}x^{-\frac{41\varrho}{4}} + \cdots,$$

$$p_2 = a_{-\frac{6\varrho}{4}}x^{-\frac{6\varrho}{4}} + a_{-\frac{26\varrho}{4}}x^{-\frac{26\varrho}{4}} + a_{-\frac{46\varrho}{4}}x^{-\frac{46\varrho}{4}} + \cdots,$$

$$p_3 = a_{-\frac{11\varrho}{4}}x^{-\frac{11\varrho}{4}} + a_{-\frac{31\varrho}{4}}x^{-\frac{31\varrho}{4}} + a_{-\frac{51\varrho}{4}}x^{-\frac{51\varrho}{4}} + \cdots,$$

---

*) In den Fällen, wo eine Reihe nur *eine* Wurzel liefert, tritt *gar keine* Vieldeutigkeit bei der Bestimmung der Coefficienten auf, indem *alle* Bestimmungsgleichungen linear erscheinen; wenn aber eine Reihe k Wurzeln liefern soll, so sind alle Bestimmungsgleichungen *bis auf eine* ebenfalls linear, aber eine ist eine binomische $k$ten Grades.

in (1), (2), (3) ein und dividirt dieselben resp. durch $x^{-\varrho}$, $x^{-2\varrho}$, $x^{-3\varrho}$, so erhält man:

$$(1)\quad 0=\left(a^4_{-\frac{\varrho}{4}}+\frac{\nu_{0,0}}{\mathfrak{a}_\varrho}\right)+\left[a^2_{-\frac{\varrho}{4}}\left(a^2_{-\frac{11\varrho}{4}}+4a_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{21\varrho}{4}}\right)-a^2_{-\frac{6\varrho}{4}}\left(a^2_{-\frac{6\varrho}{4}}-4a_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{11\varrho}{4}}\right)-\frac{5}{4}\frac{\nu^2_{0,0}}{\mathfrak{a}^6_\varrho}\right]x^{-5\varrho}+\cdots$$

$$(2)\quad 0=\left(a^2_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{6}{4}\varrho}+\frac{1}{4}\frac{\nu_{0,0}}{\mathfrak{a}^2_\varrho}\right)+\left[a_{-\frac{6}{4}\varrho}\left(a^2_{-\frac{11}{4}\varrho}+2a_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{21}{4}\varrho}\right)+a^2_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{26}{4}\varrho}-\frac{5}{8}\frac{\nu^2_{0,0}}{\mathfrak{a}^7_\varrho}\right]x^{-5\varrho}+\cdots,$$

$$(3)\quad 0=\left(2a_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{11}{4}\varrho}+a^2_{-\frac{6}{4}\varrho}+\frac{1}{2}\frac{\nu_{0,0}}{\mathfrak{a}^3_\varrho}\right)+\left[2a_{-\frac{\varrho}{4}}a_{-\frac{31}{4}\varrho}+2a_{-\frac{6}{4}\varrho}a_{-\frac{26}{4}\varrho}+2a_{-\frac{11}{4}\varrho}a_{-\frac{21}{4}\varrho}-\frac{27}{16}\frac{\nu^2_{0,0}}{\mathfrak{a}^8_\varrho}\right]x^{-5\varrho}+\cdots,$$

woraus sich successive die Werthe ergeben:

$$a^4_{-\frac{\varrho}{4}}=\frac{\nu_{0,0}}{5\nu_{4,\varrho}};\qquad a_{-\frac{6}{4}\varrho}=-\frac{1}{4}\frac{\nu_{0,0}^{\frac{2}{4}}}{(5\nu_{4,\varrho})^{\frac{6}{4}}};$$

$$a_{-\frac{11}{4}\varrho}=\frac{7}{32}\frac{\nu_{0,0}^{\frac{3}{4}}}{(5\nu_{4,\varrho})^{\frac{11}{4}}};\qquad a_{-\frac{21}{4}\varrho}=\frac{663}{2\cdot 4^5}\frac{\nu_{0,0}^{\frac{5}{4}}}{(5\nu_{4,\varrho})^{\frac{21}{4}}};$$

$$a_{-\frac{26}{4}\varrho} = -\frac{1848}{4^6}\frac{\nu_{0,0}^{\frac{6}{4}}}{(5\nu_{4,\varrho})^{\frac{26}{4}}}; \quad a_{-\frac{31}{4}\varrho} = \frac{43263}{4^8}\frac{\nu_{0,0}^{\frac{7}{4}}}{(5\nu_{4,\varrho})^{\frac{31}{4}}}$$

und allgemein:

$$a_{-\frac{(5q+1)}{4}\varrho} = -\frac{\prod_{1}^{q-1}\lambda(-5q-1+\lambda\cdot 4)}{q!\,4^q}\frac{\nu_{0,0}^{\frac{q+1}{4}}}{(5\nu_{4,\varrho})^{\frac{5q+1}{4}}}; \quad (q>1).$$

Der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder irgend einer i^{ten} Partialfunction 4ter Classe unserer Reihe hat wiederum die von i unabhängige und somit für alle Partialfunctionen, also auch für die Reihe selbst chararkteristische Form:

$$\frac{a_{-\frac{(5q+21)}{4}\varrho}}{a_{-\frac{(5q+1)}{4}\varrho}}$$

$$=\frac{\left(-5-\frac{17}{q}\right)\left(-5-\frac{13}{q}\right)\left(-5-\frac{9}{q}\right)\left(-5-\frac{5}{q}\right)\left(-5-\frac{1}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{q}\right)\left(1+\frac{4}{q}\right)\times\left(-1-\frac{5}{q}\right)\cdot 4^4}\cdot\frac{\nu_{0,0}}{(5\nu_{4,\varrho})^5}; \quad (q>5).$$

Die Reihe ist also wiederum convergent und liefert zugleich durch ihre vier circumplexen Functionen 4ter Classe *vier* Wurzeln der gegebenen Gleichung unter denselben Bedingungen, wie $\mathfrak{F}(x)$ *eine* Wurzel liefert; und zwar ist die Bedingung genau die entgegengesetzte, wie in § 15, so dass die Lösungen sich ergänzen.

Somit ist die Lösung aller möglichen trinomischen Gleichungen 5ten Grades (deren Coefficienten als Functionen von x die einfachste Form haben) für alle Fälle durchgeführt und zwar so, dass in jedem Falle zugleich das ganze cyklische System von Gleichungen mit gelöst wird. (In den Fällen, wo die Lösung nur für einen Werth von l durchgeführt wurde, wird nach den früheren Angaben es sehr leicht sein, für die übrigen Werthe die Lösungen zu ergänzen.) Man sieht aber auch leicht, dass die Theorie unsrer Lösungen in ihrem Principe überhaupt unabhängig ist von der angenommenen speciellen Form der Coefficienten; es kann viel-

mehr die Gleichung *eine vollständige* und die Coefficienten können gewisse Potenzreihen von x sein. Die Form derjenigen Potenzreihen, welche im allgemeinern Falle sämmtliche Wurzeln liefern sollen, wird dann nur etwas complicirter und deshalb haben wir als Beispiele diese specielleren Fälle ausführlich behandelt, welche später durch ihren Zusammenhang den Uebergang zum allgemeineren Fall illustriren sollen.

Schlussbemerkungen.

a) Die ausführliche Durchführung der verschiedenen Formen der Lösungen für die speciellen trinomischen Gleichungen 5ten Grades wäre an sich nicht nöthig gewesen, da es möglich ist, jede derselben auf die andern zurückzuführen, indess wird es sich zeigen, dass bemerkenswerthe Beziehungen zwischen den einzelnen Fällen stattfinden, die das Bestreben, sie deshalb alle nebeneinander aufzustellen, rechtfertigen dürften. Ausserdem wird es sich deutlicher bei der Behandlung des allgemeinen Falles herausstellen, dass diese Beispiele geeignet sind, jenen allgemeinen Fall besser zu beleuchten.

b) Was den allgemeinen Fall betrifft, so muss noch zwar gar vieles von dem, was in diesem Abschnitte angedeutet worden ist, ausführlicher behandelt werden (das soll in den weitern Abschnitten geschehen); jedoch darf ich wohl, glaube ich, annehmen, dass in der gegenwärtigen Arbeit der Hauptzweck der Anwendung unserer Cofunctionen auf die Lösung algebraischer Gleichungen klar genug hervortritt, indem keine principiellen Schwierigkeiten vorliegen, auch für die Darstellung in der Umgebung beliebiger Verzweigungspunkte dieselbe elementare Behandlung, welche lediglich auf Gesetzen, die aus identischen Gleichungen, aus elementaren zahlentheoretischen Congruenzen sich ergeben und auf dem einzigen Begriffe der Convergenz einer Reihe basirt, weiter durchzuführen.

c) Wichtig ist folgende Bemerkung. Für die trinomische Gleichung genügen deshalb zwei Lösungen, eine innerhalb eines Kreises um den Nullpunct und eine andere ausserhalb dieses Kreises (oder um den Unendlichkeitspunct), weil in

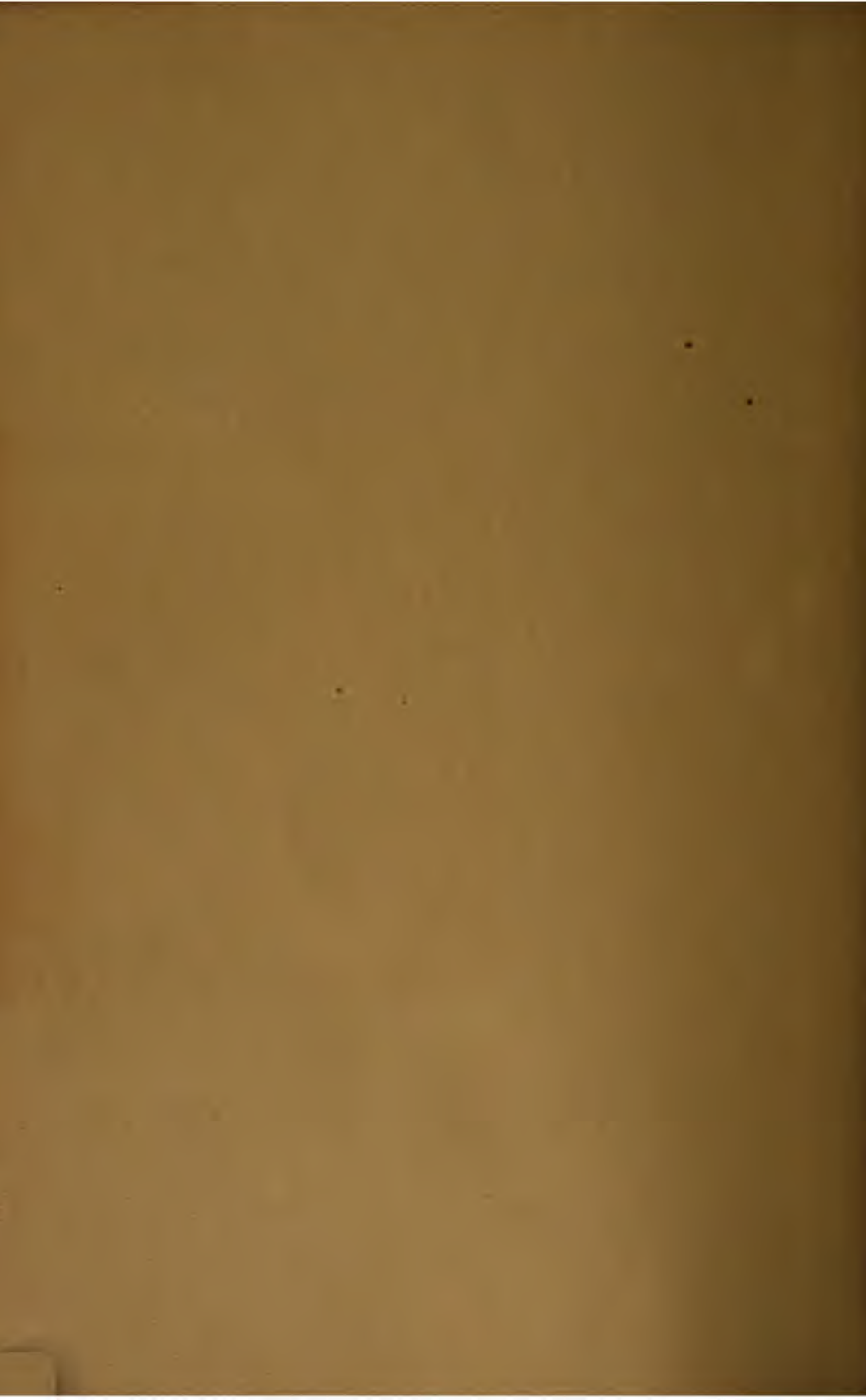
derselben, wie Gauss bereits bemerkt hat, alle Verzweigungspuncte auf der Peripherie des Kreises liegen. Der Zweck unserer ersten Methode für die Erweiterung der Lösung auf die ganze Ebene bei dem allgemeinen Falle (§ 10), welche in einer Anwendung der Fuchs'schen Substitution

$$z = \frac{f(w)}{w\,g(w)}$$

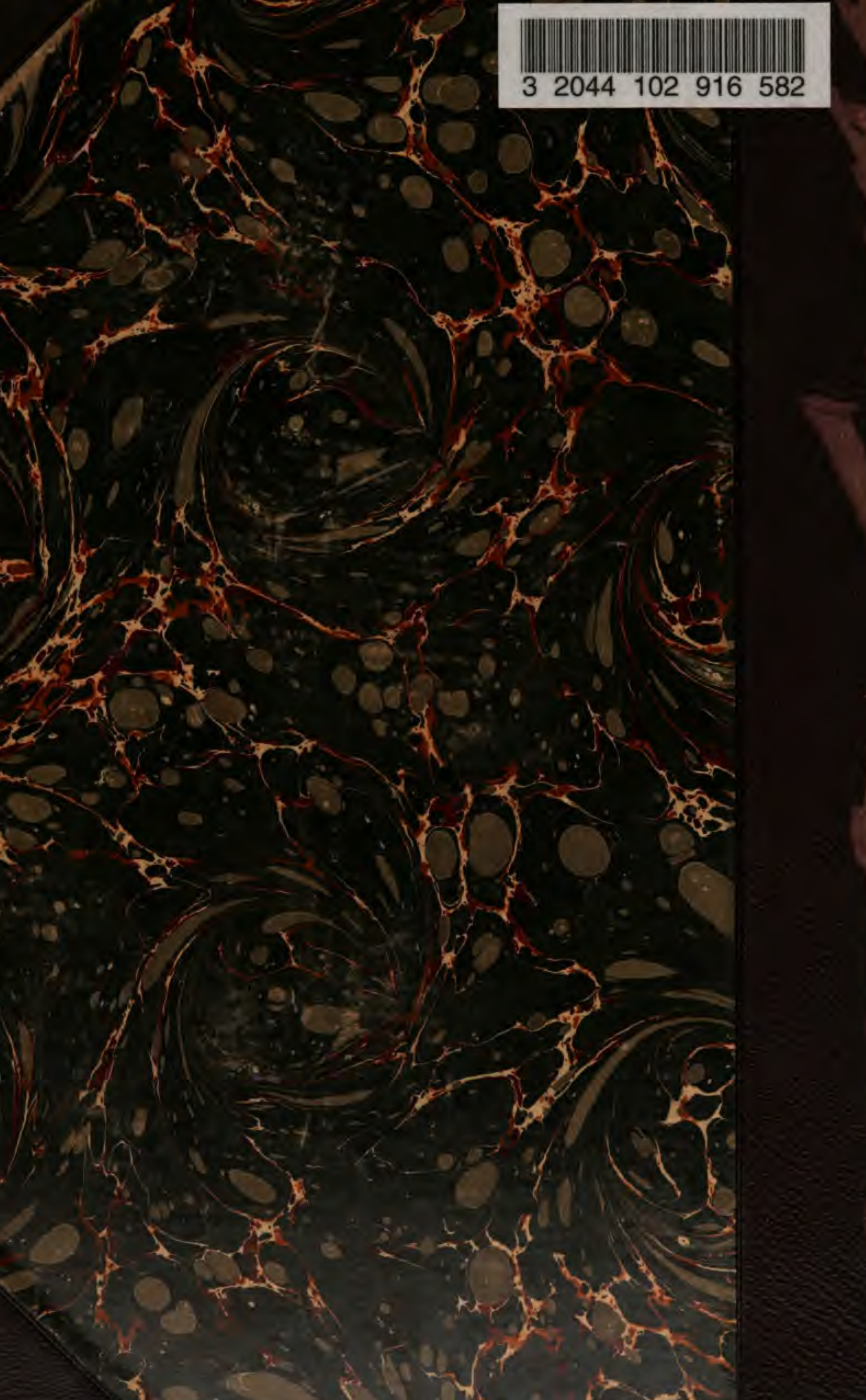
besteht, charakterisirt sich darin, dass sie durch eine vorgeschriebene Abbildung der Ebene jeden allgemeinen Fall auf einen solchen zurückführt, wo sämmtliche Verzweigungspuncte auf der Peripherie eines Kreises liegen. Dieses soll später ausführlich behandelt werden.










3 2044 102 916 582